水波物語

你聽過池塘很深而海水卻很淺的論調嗎？你知道這和襲向岸邊的波浪大有關係嗎？下次約女友去海邊前記得先讀本文，以免重蹈筆者的覆轍……

盛博納

關山看日落

很多男生像我一樣，有想約女友一起去關山或淡水看日落的浪漫念頭。你想想，一個念理工的男生坐在岩石上，望著被天邊彩霞逗得滿臉羞紅的海洋，忽然間有感而發地吟出一首詩，那種充滿文學氣息的景象不曉得要讓女孩如何傾心醉倒啊！

我特地背了三首詩，古詩、現代詩外加英詩一首。天公也很作美，那個夕陽也有著我大二時在克里特島上曾數度擁抱過的氣質：紅而不艷、亮而不炫。轉頭看了一下身邊那秀麗的臉龐，我幾乎可以完全確定她一定會喜歡即將要浮上我心頭的詩句。

「Doggy，你看那邊的海浪，還沒衝上岸就滾成一團碎掉了！這也能用你們念的物理解釋嗎？」女孩指著遠方，用我那從小被叫大的綽號輕問著。我愣了一下，想起自己在物理系待了近四年卻從沒修過流體力學，那曉得用什麼物理去解釋這個玩意兒？於是嚥了一下口水，順便把剛到口的現代詩也一起吞下去，「這是很難的非線性問題，我相信我的同學大概也沒有人懂。」我說的是真話，雖然此中也用上了貶低同儕，以免顯得自己很無知的伎倆。

女孩可能覺得自己問了一個已傷害到我自尊心的問題，於是趕緊補了另外一個看來似乎較易回答的問題：「你會不會覺得很奇怪，那些波浪好像特別喜歡朝岸邊直直衝來？這和萬有引力有關嗎？」

我很高興台灣的任何一個風景區都有一堆人在賣小吃。因為我忽然間覺得有點餓，於是立刻拖了她去吃大腸麵線和烤魷魚。雖然因此錯失了吟詩炫耀的機會，但至少是不用去面對一波波不斷湧來的海浪了。

傅利葉分析與重疊原理

吃了一次悶虧（好吧，以及麵線和魷魚），回到台北後自然要練功補回來，以免下回出同樣的糗。巧的是，系上剛好要辦高中生物理營，而其中一場演講「水波水波，學問多多」就是由教過我普物的教授擔綱，我自然是樂得免費入場吹冷氣了。雖然教授用了一些號稱是多媒體的東西作為輔助教材，不過依我看恐怕成效不彰（老師，對不起啦！）。於是我自己又到圖書館搬回一堆書來K，最後總算是搞通了些。這也就是你底下將讀到的玩意兒。不過，因為本刊特別強調「一張彩圖遠勝一千句話」，我只好徵求老師的同意，借用他演講稿中的附圖來灌水。所以在閱讀前請記得了：文章是自己的好，但圖是別人的漂亮。（老師，這回您老可高興了吧！）

要了解水波，第一個必須澄清的概念就是：

你看到的波都複雜到無法用數學公式去描述！

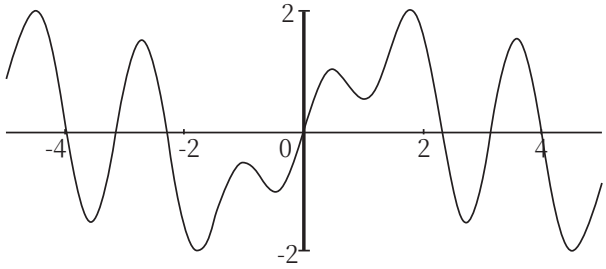
（這倒是和編者對本文「避免使用公式」的要求不謀而合！）

就是因為這個緣故，所以我想給你一個良心的建議：想追女友，不要帶她去看海！因為你連「這就得套用歐斯卡布克拉的八元方程式才解得出來」這種嚇唬人的鬼話都掰不出來。你看到的海浪是無法用數學

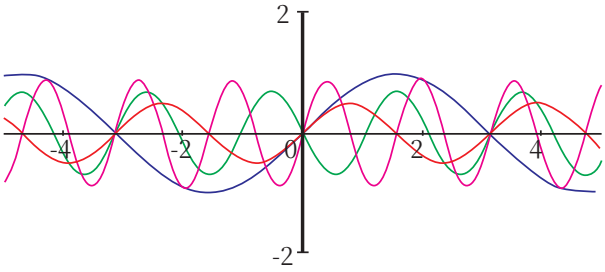
公式去描述的，就這麼簡單！

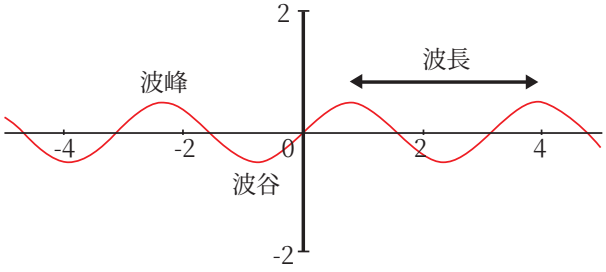
果真如此，那流體力學專家又要如何賺錢活口呢？於是他們決定先研究風比較平、浪比較靜的場合。因為這時候水的表面看起來平滑多了，似乎比較容易用數學函數去描述它。你很狐疑地拿起筆來在紙上畫了一條很光滑卻又有些上下起伏的曲線：

「哪，這條曲線也可以用數學函數去描述呀？」



是的，而且最妙的是數學家還說這類曲線竟可以表示成一堆很單純的波形的疊加。例如，下圖中四條顏色不同（但顯然都很單調）的簡單波形疊在一起之後真的就會組合成上圖中那個複雜得多的曲線！





這套玄妙的理論叫做傅利葉分析，通常我們都要等到大二時才會學到。所以，我們至少有一年快樂的大學生活。至於那些單純的波形則叫做正弦波。一個正弦波最高的部分叫做波峰，最低的地方叫做波谷，而波峰到波峰的距離就叫做波長。

這些囉哩叭唆的東西其實只消看看上圖就清楚了。

「好吧，就算是我數學功力超高、通曉傅利葉分析，很會把一個複雜的波形分解成一堆正弦波的組合好了。那又怎樣？！」其實也不怎麼樣啦，因為我們之所以要這樣做的原因只是為了方便而已。

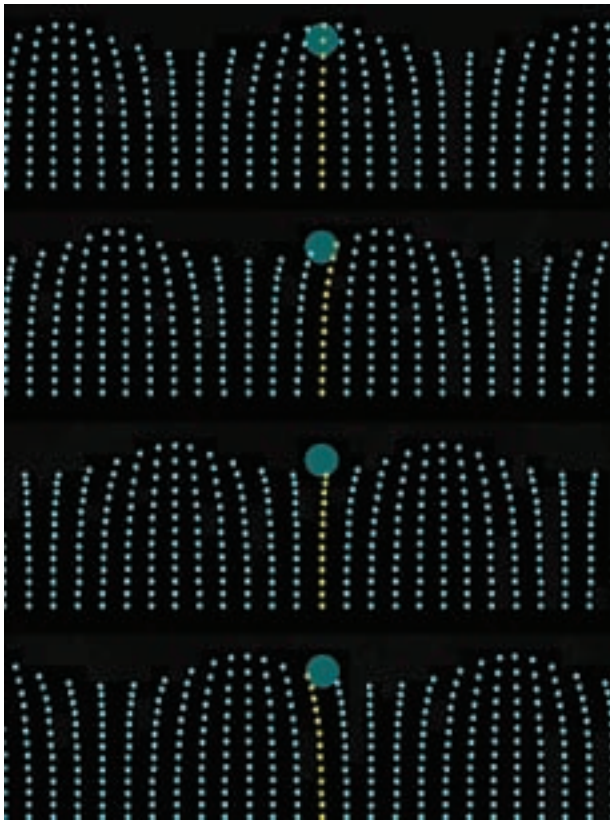
水波的研究亦然，如果我們能先弄清楚簡單的正弦波到底有什麼傳播特性，那我們便可透過傅利葉分析去將這些單純的波動合成出真實波浪的行為。如果你明瞭我想表達的這個觀點，那你就應該能回答一個從念高中以來就一直困擾著我的問題：「不論是抖動跳繩去製造繩波，還是利用洗臉槽去做水波實驗，我永遠就是振不出像正弦波的波形出來。可是課本上畫波動時卻永遠只畫正弦波。這不是偏離現實很遠嗎？那為什麼課本要教我們那種和生活脫節的波動現象呢？」答案是（嘿！是誰說這和國文課念《水經注》〈江水注〉有異曲同工之妙的？）：

了解正弦波的傳播就可以使我們透過合成的技巧去描述更接近真實的複雜波動！

這麼重要的概念也有個專有名詞，叫做「重疊原理」。這個原理不只適用於水波，舉凡電磁波、地震波、電漿波、聲波等也都可派上用場。你唯一需要注意的是：不可以讓這些五花八門的波振盪得太厲害，否則重疊原理會失效。（我早先不是「預言」過：非線性問題連我的同學也解不出來？振盪的幅度太大就會引發非線性效應。此時一加一不得二，重疊原理也莫可奈它何。）

隨波不逐流

好吧，如果正弦波真的這麼有用，那麼它到底有什麼傳播特性呢？第一，假如水很淺，那麼每一個水的小粒子都會沿著一個橢圓形軌跡來繞著它自己的平衡位置做運動；但如果水很深，則它的軌跡會變成等速圓周運動。不論是橢圓還是正圓，粒子運動的幅度都會隨著越往深處走而變得越小，原因是在表面激起



的波不可能對深層的水有很大的影響。上圖是把先後四個瞬間的波形拍照，以方便你看出水波在淺水及深水中傳播時的差別。

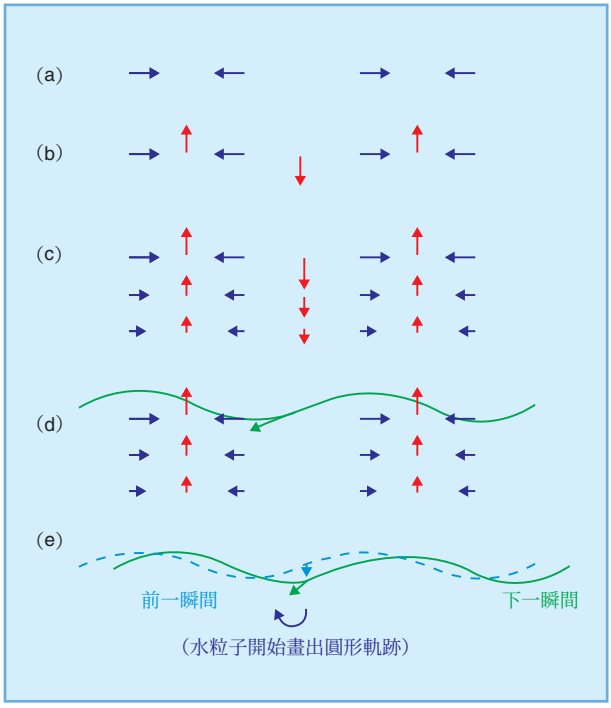
可是為什麼水中的粒子會做周期運動而不會「隨波逐流」呢？其實我們可以從質量不滅定律去看出端倪！

右圖中的（a）是正弦波通過時在某一水層內速度的水平分量。由於正弦波在空間中有周期性，所以圖中的速度箭頭也有周期性。特別地，（a）圖中箭號相牴觸的部分代表水會對衝在一起。可是水是很難被壓縮的液體，所以箭號相牴觸的部分一定有一些水會被往上頂，而箭號相離的部分水就會往下落（質量守恆嘛）。所以，我們可以把這個結論畫在（b）圖內，其中紅色箭頭代表水往上或往下衝的速度。

更進一步說，在水面上興風作浪是很難將其影響傳到深水處的（否則你就得提供近乎無窮的能量去擾動所有的水），所以整團水內的速度分布應該像（c）圖所示。一旦理解這整個液體內速度分布的情況，我們立刻會猜到液面的長相必然類似（d）圖中那條綠色曲線，道理很簡單：紅色箭頭處的水有的可以往上沖、有的卻可以往下掉；能占到這種進可攻退可守的極佳戰略位置的，只有介於波峰與波谷間的水粒子。至於深藍色（水平）箭頭所對應的，當然就只能是波峰與波谷了。此外，我們從速度場分布的連續性也可以猜到其他位置的速度是指向何方，像（d）圖中的綠色箭號就是個明顯的例子。（我是利用它兩側的向左藍箭號與向下紅箭號而推知。）

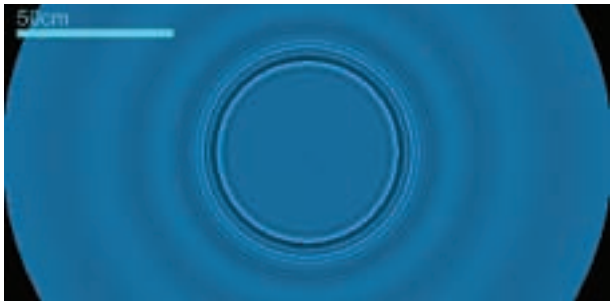
從（d）圖中水面粒子的速度分布情形，不難看出來這個波在下一瞬間會朝右方傳播。把（d）圖中的液面向右傳播一點點距離後，我們便畫出了（e）圖。現在請注意了：圖中淺藍色速度箭頭處的水到了下一瞬間後，其速度方向將變成綠色箭頭所指的方向。繼續讓波往右傳送，這個水粒子顯然已經開始要順時針描出一條圓形軌跡了。

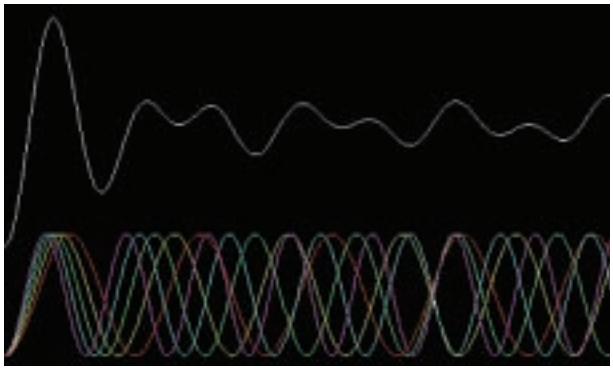
話雖如此，你也不要硬邦邦地認定一個漂浮在水上的浮體真的就不會「隨波逐流」！事實上它或多或少仍會「逐波而居」！但這是正弦波傳播時的一種微小的非線性效應（又來了！又來了！），我們可以暫且把它忘了。



表面張力與重力的拉扯戰

水波傳遞時的波速特性和到底是什麼力量想讓正弦波傳播出去有關。如果波長很短，例如短到數毫米，水面皺紋很密，水的表面張力就會施加一個非常強的回復力想將它拉平。（唔，年輕的女友目前大概不會對此效應有很強烈的感受吧？）這麼強的回復力會使水波的速度變得超快。聲波在鋼鐵內的速度很快，也是因為其彈性回復力極大的緣故。所以，純表面張力波的特性是：波長越短波速越快。





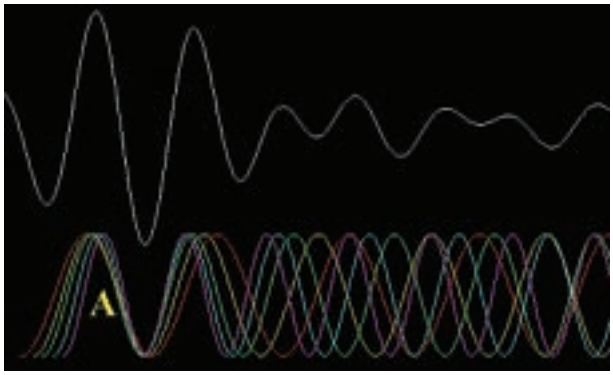
可是如果波長較長，例如數公分，表面張力造成的回復力就遠比重力來得小，此時我們直接討論重力的影響便可。純重力波的特性剛好相反：波長越長波速越快！要明白此中道理，我們先要記得一件事：波速是一個周期的時間內波峰走過的距離。咦，那就是波長呀！所以說穿了，波速就是把波長除以周期就對了。當我們固定水波的振幅而把波長加大時，水的表面會變得更和緩，而重力場能讓水粒子做周期運動的回復力也相對變弱，這和單擺的運動很相似：在固定擺幅後，把單擺的擺長調長時，重力場造成的有效回復力也會變弱（因為幅角變小了）。因此，水波的波長和單擺的擺長根本是扮演同樣的角色！可是我們都知道把擺長放大四倍後單擺的周期只會增加為兩倍而已，所以同理把波長放大後水粒子的回復周期只會和緩增加。於是，波速（等於波長除以周期）在波長放大時當然就會變快了。

投石問湖

純重力波與純表面張力波這兩種相反的特性互相制約的結果是：因被表面張力主導，波長很短的波走得超快，但因被長波的重力波主導，波長很長的波也絕不落人後，於是速度最慢的就落到波長既不太長又不太短的波上了。這就引起了一個有趣的現象：把一塊小石頭丟到池塘或湖中間，結果你會看到一圈漣漪往外擴張開來。到目前為止這沒啥奇怪。但仔細看一下，你會發現漣漪外圈有各種波的擾動（這也合理），而漣漪內卻靜如止水，一副承平無事、萬物與我何干的莊嚴寶相！不僅如此，漣漪外圈的波峰與波峰之間距，似乎也有越靠外面就分得越開的趨勢。這是怎麼回事？我們目前發展出來的理論其實可以拿來解釋這個現象，但是要把道理說清楚了卻仍得費一番口舌。

利用傅利葉分析，我們可以去把小石子碰到湖面時激起的擾動，分解成不同波長水波組合。底下我們就用紅、黃、綠、藍及紫色等共五個波來馬馬虎虎地合成出碰撞瞬間水面的波形，其中紅色波的波長最長，紫色的最短。（通常我們需要把成千上百的波疊加起來，才能相當精確地重製出碰撞瞬間真正的波形。不過為了將道理說清楚，不得不做粗略的近似。我想，意思還是到了吧。）在示意圖中，石塊的落點是位於白線左方凹陷最厲害的部分。你當然立刻注意到這剛好是所有正弦波的波谷完全疊在一起的地方。我們說，該處的波正在做「建設性干涉」。而不同波的波峰與波谷互相抵消的地方，則是對應到水面擾動較不顯著的部分。此時，這些波就正進行著「破壞性干涉」。嗯，很容易理解。

可是如前所述，這些波因為波長不同，回復力有異，傳播速度當然也就各自不同。現在你若讓這些波各以自己的速度傳開來，結果會怎樣呢？下面這個圖告訴了我們大致的情況。



在上圖中，假設波長最長的紅波走得最慢、波長最短的紫波走得最快。結果呢，原先最左方完美疊在一起的各色波谷整個都錯開來，於是「建設性干涉」就沒了。反倒是A點的部分這回碰巧成為各色波的「斜坡」想密合在一起的位置，因而成為水面擾動最大的地方。換句話說，「建設性干涉」現在是發生於A處。我們習慣上把這種擾動很大的區域叫做一個「波羣」或「波包」，而波羣自最左側傳到A點處的這個速度就叫做「羣速度」。由於波羣是因為各色波以自己的特性速度在運動而造成，所以羣速度的大小是這些色波合力表現出來的集體行為。也因此，羣速度可能和單獨一個紅波或紫波的速度不同。

在這個範例中，你可以看出羣速度顯然比任何單一色波的速度都來得快。稍微想一下，這並不難理解：紅波的波長比紫波長，所以一開始當它們的波谷都疊在一起時，紅波因為比較肥胖，所以它波谷右方的斜坡一定會稍微領先紫波右方的斜坡。但紫波走的比較快，所以待會兒它右方的斜坡就會追上紅波的斜坡而密合在一起。當它終於追上時，斜坡處就形成建設性干涉而成為新的波羣位置。既然這個新波羣尚且領先了紫波之波谷，這就表示羣速度會比任何單一色波的速度都來得快。這個有趣的結論可以用一句話囊括，即：

如果短波走得較長波快，則波羣速度就會比各分波還快；反之亦然。

可是如果你真的討厭這些莫名其妙的規則，那麼請你至少記得一件事：

投石入湖後所看到的水面擾動可以用波羣的概念去描述。

囉哩叭唆了一堆，現在終於可以回到正題上來。我們曾經說過不同波長的水波其波速各異，但裡面有一個是速度最慢的。其實，水波的羣速度也完全一樣有一個最小值。所以，在投入石塊的一秒後，小石子造成的所有擾動都已被這些波羣快速帶離中心區了，就連最慢的波也都已逃開中心點一個距離。既然能逃的、該逃的全落跑了，那當初石頭落下去的地方當然就見不到波了！

由於我們投入湖中的石塊通常也都有幾公分大小，因此它激起的水波可能以重力波為主。在這種情況下，長波的速度會較快，因此你會發現漣漪外圍的波動有一個特性，即越外圈的波長越長。前面曾提到，越靠外側則波峰與波峰之間的距離也分得越開，指的便是這個現象。此外，這些波越往外跑就更是快馬加鞭往外衝！

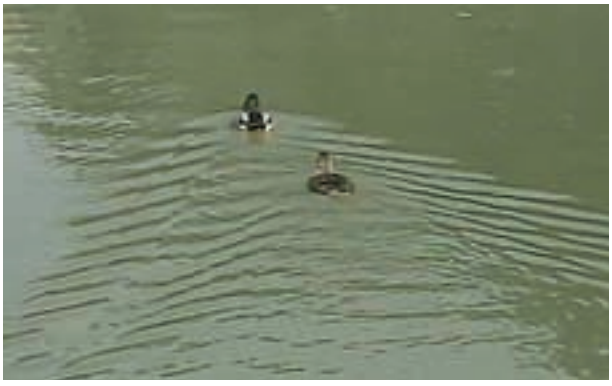
丟了石子，跑來鴨子

當鴨子在靜止的湖面划水時，你可能會注意到牠會在身後造出一些很有趣的波紋。這些波紋看似複雜，但基本結構卻不難解釋。

解答的第一步：

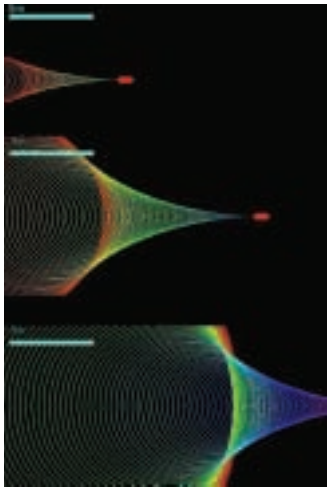
鴨子划水可以看成是沿著一條直線軌跡在連續丟小石頭！

這些等效的小石頭造成的效果我們才剛討論過，就是會以落石處為中心發出一圈圈往外傳出的重力



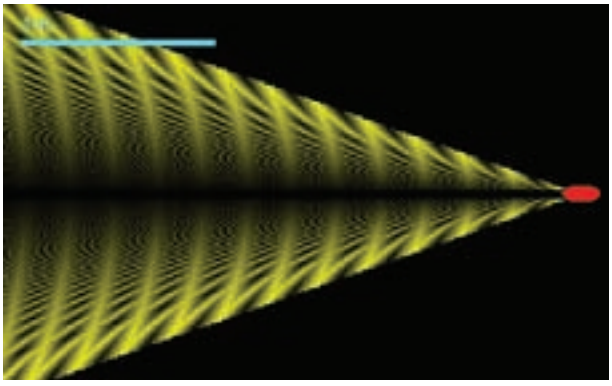
波。但這回問題麻煩了些，因為鴨子行進路徑上的每個點所發出的漣漪還會彼此干涉！

為了了解它們如何干涉，我們乾脆讓鴨子往右划行，並且讓牠在行進的每一瞬間都只代表性地發出一個波，然後看看這些波產生什麼樣的建設性干涉。為了方便觀察，我們特地為這些波塗上不同的顏色以資識別：紅波是最早產生的，依次為橙、黃、藍、靛，紫波是最後才發出來。但此時「鴨子」已經游出圖外了。右圖顯示出干涉的過程。



正如前述，這些波在往外傳播時會越跑越快。也因為是這樣，我們才會發現它們會形成第三圖中的兩類不同的包絡線：往鴨子兩側排開來的彎彎的【>】形曲線，以及落在鴨子後方的【）】形曲線。這整個組合起來的【）>】形包絡線正是建設性干涉發生的所在地。

了解了以上特性，我們便可真的讓不同時刻投入湖中的石頭去做波的干涉圖形了，這顯示在下圖中。當然，這個波形不過是把好幾個大小不同的【）>】形曲線疊在一起罷了。而這，就是鴨子划水時產生的波紋。

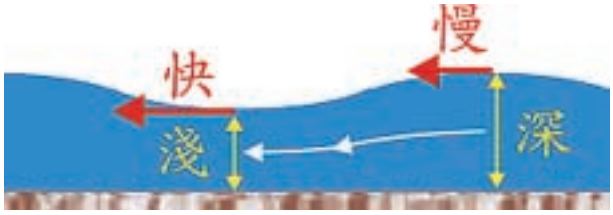


湖深海淺

在講鴨子戲波的小節裡，我們無意中做了湖水是很深的合理假設。那麼在很淺的水層中，水波又是如何傳播的呢？講到淺水，你或許會想到吃生魚片時小碟子內用來沾哇沙米醬的醬油。噢，那是很淺沒錯，不過我想的卻是海水。海水？！那個可深達數公里的海水？

是的，不過我顯然得做個補充說明。水的深淺是一種相對的概念。例如，一公尺深的湖水，對戲水的鴨子來講已經很深，因為牠掀起來的波的振幅和波長都遠小於水深。可是由於地層改變或地震等引起的海波，其波長可長達數百公里，此時海水的水深和它相比簡直是小巫見大巫了。遠的不提，就拿近海的浪濤來說好了，此時水深可能已減為兩、三公尺了，但浪與浪之間的距離可能也有數公尺之譜，所以把它視為淺水波並不過分。

如果淺水波的振幅不大，那麼波速只會與水深有關，而和波長一點關係都沒有。更明確地說，水越深波速就越快。要看出這個結論，最簡單的辦法是跟著



水波一起跑，然後研究此時水會怎麼流。

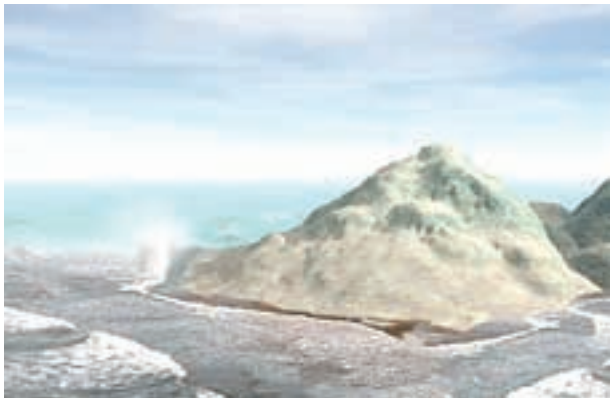
假設水波原來是以每秒一公尺的速度往右傳播，對於也是以每秒一公尺的速度往右跑的你來說，波形永遠不會變。波形雖不變，但是你會測到整團水是以平均每秒一公尺的速度往左流去。更仔細來看，貼著水表面往左流的粒子在「爬」到波峰處時，會因損失重力位能而流得稍慢，而當它來到波谷時則會流得較快。給定相同的波高，則水粒子從波峰跑到波谷處損失的重力位能也固定了，這些能量一定是化成多餘的動能。假如你把平均水深增加，則波谷下方可容水流過的橫截面積和波峰下方之橫截面就越接近，所以通過波谷處之水的流速和通過波峰處之水的流速會差很少。可是多餘的定額動能怎麼會使波峰與波谷間之速

度差很小呢？唯一的可能性就是，當初水流早就有一個很大的向左衝的速度。打個比方，損失一萬元對於億萬富翁造成的衝擊比它對窮學生造成的衝擊小多了。可是你所看到的水流向左衝的速度根本就是水波傳播的速度。這就表示，波速會隨著平均水深的增加而變快。

說了這麼多話，我現在總算可以對女友的問題有了一個交代。為什麼波浪好像特別喜歡朝岸邊直直衝來呢？那是因為，一排波浪在往陸地行進的過程中，如果發現某地的水比較深，這通常表示它離陸地較遠，於是它會衝得較快；而若另一個地方的水比較淺，則表示登陸在望，於是它會放慢腳步等同行的夥伴。於是乎波浪就很容易聯手垂直衝向岸邊。

說到這裡，我忽然間靈光一閃，想到我連「海浪還沒衝上岸就滾成一團碎掉了」這個現象也可以有一個粗淺的解釋了！（這下女友一定會佩服死我了。）想法很簡單，就是「長江後浪推前浪」的道理嘛！後浪是位於深水處，它的波速較快，所以會往前追趕位於前方淺水處的波。後浪與前浪堆在一起，浪變陡了，結果自然會撐不住而碎掉。

其實，海嘯的形成也可用同樣的方式去理解。當地震發生時，在方圓幾百公里內的地方水深可能因此增加個幾十公分。這個增加量固然很小以致不容易察覺，但當它傳抵岸邊時，水深驟減成數十公尺，於是後浪推前浪一擁而上，造成的浪高絕非昔日阿蒙可比！



月滿潮不高，牛頓也瘋狂

提到海嘯湧上岸，你可能會聯想到另一個比較不致命卻也很壯觀的景象—錢塘江潮。不過我手邊沒有相關照片，所以乾脆拿同樣壯觀的法國Dodogne河和大夥分享。這張照片所顯示的，是大潮沿著淺河道湧進來的景象。特別值得注意的一點是，潮波是以衝擊波的形式灌進來，所以波的鋒面很明顯：波鋒前方的水面很安靜，令人完全感覺不出波鋒後方的滔滔浪滾。你也許會猜說我接著必定是要來談這個課題。嗯，這是個百分之百非線性的問題，所以我想還是將之擱一邊，專心討論潮汐現象好了。

此照片是經原攝影者Fabrice Colas慷慨同意引用，謹此誌謝。

我猜很多人都聽過潮汐是因為月亮以及太陽吸引地球的海水所導致，通常我們都是援用牛頓的平衡理論來解釋，所以我現在就把他的說法拿來搬弄一番。不過，由於月亮的影響比太陽來得大，故底下直接把太陽給忘了。

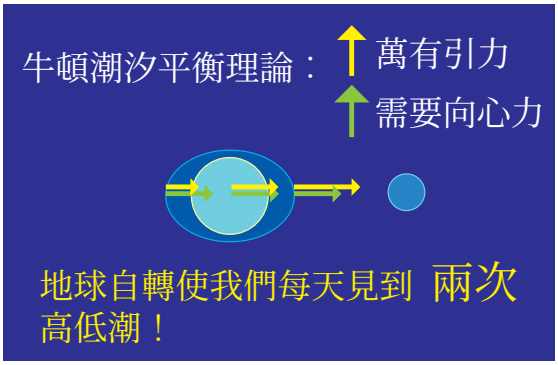
我們知道月球與地球是繞著它們公共的質心在轉動，但因為地球質量較大，所以質心離地球近多了。事實上，此質心是落在地球內部。既然地球上的每一點都因這個「公轉」而在做圓周運動，它們就得有某些機制來提供做圓周運動時所需的向心力。這個力量基本上就由月亮對地球的萬有引力來提供。

但是，萬有引力的特性是距離越短力量越強，所以離月亮較近的點感受到的萬有引力比它需要的向心力還大，海水也就被月亮拉了出去而形成高潮。位於地球背面看不到月亮的對頂點則不然，此時萬有引力因距離較長而變弱，並不能充分提供所需要的向心

力。所以，該地的海水也會被拉離地表而形成高潮！你可能會懷疑這些水怎麼不會因此被無限制地拉離地球，成為漫遊太空的宇宙水？答案是：我們不要忘了地球有很強的吸引力，隨時會把它們給抓住哩！

這個理論最好的地方是，因為地球每24小時就自轉一次，所以它預測了我們一天會看到兩次潮起潮落，這和經驗是符合的。此外，它還告訴我們，高潮基本上應該在月亮處於正天頂或反天頂時發生。大家似乎也都能認同這個結論。

這一切都非常的美好，除了一件事，由於月亮的軌道面和地球的赤道面很接近，所以，我們很容易理解到這套理論對於赤道附近的潮汐現象應該最管用。但結果呢？剛好相反，月亮在正天頂（或反天頂）時發生的卻是低潮！



搬出牛頓的大名來竟還隨口掰出一個與實測相反的理論，這下可糗大了！

補救之道是另外祭出拉普拉斯（Pierre S. Laplace）的大名來做修正！在牛頓之後約一百年，拉普拉斯想到了一個未被牛頓計入的關鍵要素，即使月亮不對地球施加任何力量，海水向來仍都是跟著自轉的地球一起動，這使得海水相對於地球上的觀察者來講是不動的。現在，把月亮的引潮力列入考慮。雖然月亮可藉由萬有引力來吸引海水形成潮汐，但海水可不是任人牽著鼻子跑的乖乖牌。如果你在水面上掀起一團水，那這團隆起可是會以波動的方式往外傳播出去的。如果我們把海深當成5公里，那麼該「淺水」波的速度約為每小時800公里。這個波從剛好是高潮的本地傳到也是高潮的對頂處所需的時間是赤道的半周長除以波速，即約為25小時。但從自轉中地球的觀點來看，月起月落會對當地的海水施以一個周期約為12小時的外加驅動力。換句話說，海水有一個25小時的自然振動周期，但月亮是以較快的12小時周期在驅動我們的潮汐波。

如果你玩過重量相差很大的彈簧，那你對以下這個現象一定不陌生。即當你以固定的周期去推拉一根彈簧時，只有重量輕的彈簧跟得上你的腳步，它會在你拉它時乖乖地伸張，在你推它時乖乖地壓縮。而對於重的彈簧來說，其表現剛好相反，由於它慣性太大，所以老是慢半拍，你推它時它才開始想要伸張，而等到你推得差不多、已經開始在拉它了，它才剛剛伸張到最長量而準備要縮回去！這也就是說：

自然周期比外加驅動力的周期還長時，系統的反應會適得其反！

我們的潮汐模型在赤道附近的表現也是這個樣子，它的自然周期（約25小時）實在是比月亮的驅動周期（約12小時）長多了，所以就像重的彈簧一樣總是慢半拍。於是乎，低潮總是在月亮高懸夜空時發生。

話雖然是這樣說，你更應該注意的是：潮汐發生的時刻與潮的高低其實與當地的地形有更密切的關係。前述的理論只能提供一個很粗略的認知而已。要不然怎麼沒聽說有成千上萬的遊客湧進淡水去觀看舉世聞名的淡水潮呢？

想追女友，不要去看海！

K了一堆書，死傷了無數的腦細胞，總算是讓我稍微了解波浪的物理了。可是你認為這樣就足以幫助我去海邊塑造出博通天文地理的形象嗎？我原來是真的這樣想的，直到我又約女友去了野柳。

「Doggy，你說波浪可以用敷衍分析去研究，（對不起，沒學過微積分的女友連傅利葉的大名都聽錯了！）但是，我看有些浪頭尖尖的波也可以走很長都不會碎掉耶。這個理論也可以解釋尖尖的波嗎？」你知道的，野柳的小吃攤遠比關山的多太多了，所以我的肚子忽然間就又餓了起來……。 □

盛博納