

玻色統計與 愛因斯坦

這是一個發生在科學界，
被人津津樂道的千里馬遇到伯樂的例子。

■王馨儀



「我冒昧地寄上這篇論文，請您指教並靜候您的回音。我很想知道您對這篇論文的看法。在這論文中，我試著不用古典電動力學，而僅假設相空間（phase space）的最基本單位是 h^3 ，去推導蒲朗克（Planck）定律中的係數 $8\pi\nu^2/c^3$ 。我的德文能力不好，無法把它譯成德文，如果您覺得它還有價值，可否請您把它譯出並發表於物理學刊上？」

我們雖然素昧平生，但我仍毫不遲疑地做此不情之請，因我們全是您的學生，從您的文章中得到您的教導，所以我毫不猶豫地求助於您。也許您還記得有個加爾各答來的人，請您允許把您的廣義相對論論文翻譯成英文，那就是在下。

您忠實的玻色（Bose）」

這是一個年輕人在1924年時寫給愛因斯坦的信件。為了使他投稿遭拒的論文能有面世的機會，他只能請求當時已享有盛名的愛因斯坦運用他的影響力，為他的論文平反。當時沒有人預料到這篇論文後來會發展成量子統計中著名的玻色-愛因斯坦統計，愛因斯坦並在之後擴展這篇論文，預言了「玻色-愛因斯坦凝聚」的現象。

黑體輻射及量子論

古典物理學家曾經對日常生活中處處可見的光，進行漫長的分析及理論爭辯。在19世紀下半，英國物理學家麥克斯威爾（James Clerk Maxwell, 1831-1879）發展出著名的麥克斯威爾方程式，詳細描述了電磁輻射在空間中運動傳播所需符合的種種法則，並把光和電磁現象統一起來，認為光就是一定頻率範圍內的電磁波。這一理論後來在1887年被德國科學家赫茲（Heinrich Rudolf Hertz, 1857-1894）的實驗證實了，說明了光其實是電磁波的一種，這時的古典物理理論已經發展到了極致。

然而在當時，古典物理學家卻面臨一個重大的困境：他們無法用古典理論，解釋物體所發出的電磁波波長與物體本身所具有的能量間的關係，包括敲開量子論大門的黑體輻射現象。

在說明什麼是黑體輻射前，先讓我們了解一

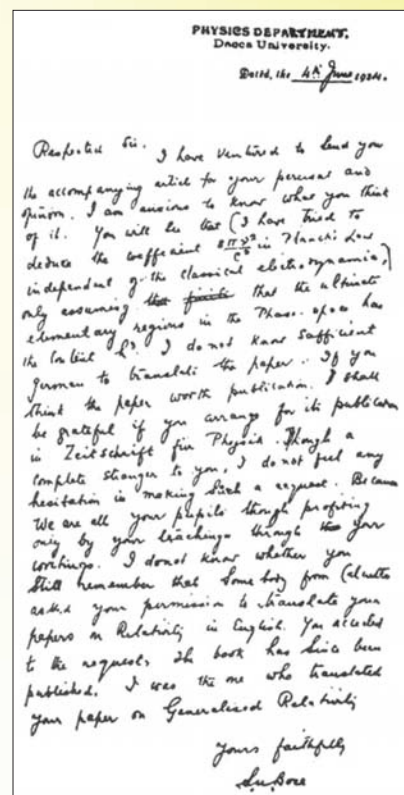
下什麼是熱輻射。

世上的任一物體，在任何溫度（絕對零度除外）下都會放射能量，這種能量以電磁波的形式向外輻射，稱為輻射能，而這種現象稱為熱輻射。物體除了會向外輻射能量外，也會自外界的環境中吸收能量，當吸收的能量等於輻射的能量時，物體的溫度就保持一定，我們稱這物體達到了熱平衡。

當物體從外界吸收能量時，會有一部分的能量被吸收，同時也會有一部分的能量被表面反射。所謂的黑體，就是某種可以把照射在它表面上的所有輻射能（包括可見光）全部吸收的物體。因為沒有任何的反射光，所以這種物體看起來一定是黑的，故稱為黑體。

黑體處於熱平衡下，也會對外輻射，這時的輻射光完全是從黑體發出來的。由此我們知道它所發出的光，必與外界無關，而只與本身熱平衡時的溫度有關，也就是與它本身所含的能量有關。因此，可以透過對黑體所發出輻射光波長的研究，得知物體本身的能量與輻射光性質之間的關聯。

雖然在自然界並沒有絕對的黑體存在，那只是一種理想化的情況，但我們可以設計一個相當近似黑體的物體。假想一個物體是空心的，並在表面上開個小洞，如果那小洞夠小，則落在上面的輻射會在空腔裡反覆地反射，就像被小洞完全吸收了，沒有機會再從小洞跑出來。這個小洞就符合了黑體的定



玻色寫給愛因斯坦的信

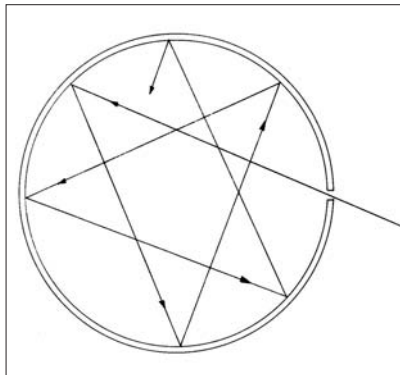


世上任何溫度（絕對零度除外）下的物體，例如桌上的一盆塑膠花，都會放射能量，這種能量以電磁波的形式向外輻射，也會自外界的環境中吸收能量，當吸收的能量等於輻射的能量時，物體的溫度就保持一定，我們稱這物體達到了熱平衡。

義。

反過來說，這個小洞也會因空腔本身的溫度而向外輻射能量，所輻射的光譜就表示著黑體輻射的特性，我們可藉由觀察這個小洞得知黑體所輻射出來的光的性質。這就意味著黑體輻射與構成物質的結構及性質無關，因為我們觀察的只是那個小洞。黑體這種特性使它成為討論電磁輻射時一個很方便的系統，因為它具有極高的普遍性，無論用哪一種物質製造的黑體，實驗都不會產生差異。

可是在當時，以古典理論計算出來的能量密度，雷利-金斯定律與溫氏定律（Rayleigh-Jeans Law and Wien's Law），卻怎麼都無法與實驗測得的黑體能量數據吻合。問題出在哪裡呢？沒有人說得準，蒲朗克就在這時提出了量子論的假設。當時的古典物理理論認為能量是連續分布的，黑體輻射出來的光波可以具有任意的能量值。蒲朗克的假設與古典理論最大



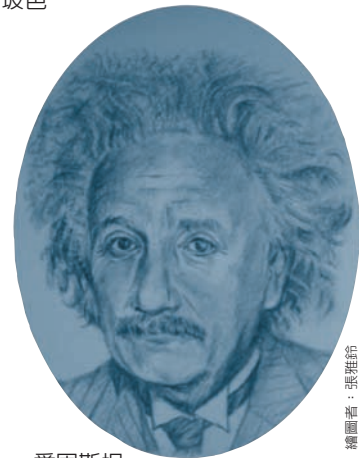
假想一個空心的物體，並在表面上開個小洞，如果那小洞夠小，則落在上面的輻射會在空腔裡反覆地反射，就像被小洞完全吸收，沒有機會再從小洞跑出來。這個小洞就符合了黑體的定義。

的不同處，就是它推翻了這個認知，他認為能量的分布是量子的。

蒲朗克認為黑體輻射是黑體內的粒子因為溫度而發生熱振盪時所產生的輻射波，他同時假設這些振盪子只能輻射出某特定值的正整數倍的能量。換言之，在古典理論中，能量值可以集成一條數線，而在蒲朗克的假設裡，能量值的集合卻僅僅是數線上的正整數點而已。雖然蒲朗克的假



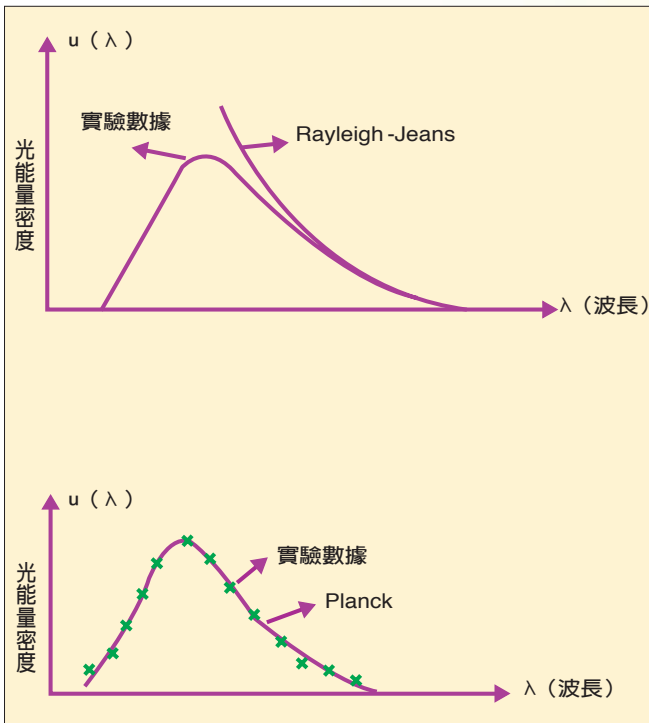
玻色



愛因斯坦

設及其推導出的公式可以圓滿地解釋實驗所得到的數據，卻沒有人可以明確地說出這個假設的真正意義為何，包括他自己。

表面上蒲朗克好像圓滿地解決了黑體輻射的問題，但仔細思考就會發現他的解釋有矛盾的地方。在蒲朗克的假設裡，振盪子只會輻射出某些特定的能量，但當這些振盪子開始輻射能量時，它們遵守的卻是古典電磁學的規範。而古典電磁學的規範，要求的卻是振盪子輻射的電磁波能量是連續的，這就形成了矛盾：用一個並非存在於假設狀況的公式去驗證假設。這使得即使結果是正確的，卻無法建



(上圖) 以能量為連續分布的古典理論計算出來的光能量密度 (Rayleigh-Jeans Law and Wien's Law)，怎麼都無法與實驗測得的黑體能量數據吻合。(下圖) 蒲朗克的假設與古典理論最大的不同處，就是他認為能量的分布是量子的。蒲朗克認為黑體輻射是黑體內的粒子因為溫度而發生振盪時所產生的輻射波，他同時假設這些振盪子只能輻射出某特定值的正整數倍的能量。雖然蒲朗克的假設及其推導出的公式可以圓滿地解釋實驗所得到的數據，卻沒有人可以明確地說出這個假設的真正意義為何，包括他自己。

立一個有力的論證及有意義的物理概念。

也正因此，在他發表這項劃時代的想法時，並沒有馬上得到認同，因為連他自己都是一頭霧水。大家彷彿只能嘗試著加進各式各樣不同的限制及假設條件，來規範物質的法則，卻不一定知道自己在做什麼，而舊量子論及量子力學就是在這樣詭譎的氣氛中慢慢發展出來的。

到了1905年，愛因斯坦發表了一篇關於光電效應的論文，引用了蒲朗克所提出的假設，並加以闡述：電磁輻射不僅是能量呈現量子化，電磁輻射根本就是由有限數目、非連續的、不能再分割的能量子所組成的。這就說明了光在某些場合中，也會展現出像是一顆一顆粒子的性質，我們把它叫做光量子或光子。量子論的物理意義在此出現了曙光。

然而當時的學術界並無法立即接受愛因斯坦

的說法，就連蒲朗克本人也無法認同，甚至認為那是錯誤的假設。蒲朗克曾這麼表示過：「愛因斯坦幾乎對他所有研究過的領域都做出了重要的貢獻，除了光的量子假設。然而我們不能怪他，因為在追求新穎的基礎科學理論時，一定需要擔待這樣的風險。」這段話充分表現了他對光量子說的反對立場。我們也可因此略為知道，當時學術界對光量子說所抱持的態度是多麼保留且質疑的。

然而玻色體認到愛因斯坦這篇論文的跨時代貢獻，於是他從另一種粒子統計的觀點，把這兩種概念結合在一起，再重新出發討論黑體輻射的能量譜。就這樣，在1924年時，這篇僅1,500字題為〈蒲朗克定律及光量子的假設〉的論文，率先敲開了量子統計之門，並且為愛因斯坦提出的光量子說提供了更有力的證據。

玻色統計的內涵

玻色為了解決蒲朗克當時所遇到的困難，並避免在邏輯上出現矛盾，所採用的方法是，他並不從古典物理中的電磁波理論出發，而只是單純地從另一種觀點—統計理論來著手。

玻色首先假設在黑體輻射內運動的是一顆一顆的光子（這想法當然來自愛因斯坦），然後引進一個嶄新的觀念，那就是它們都是不可分辨的。什麼叫不可分辨呢？就是我們無法說出它們之間有什麼不同，也無法替它們貼上標籤，這在排列組合的狀態計算中就與可分辨的粒子（即古典理論）有很大的不同。舉例來說，在學校生活中我們常會有分組的經驗，假設現在有一個老師要把3個學生分成兩邊，會有幾種分法呢？

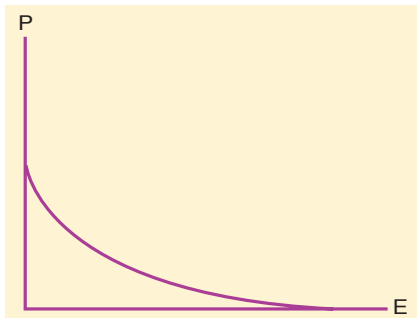
我們可以分分看，總共應該會出現： $ab|c$ 、 $bc|a$ 、 $ac|b$ 、 $c|ab$ 、 $a|bc$ 、 $b|ac$ 、 $abc|0$ 及 $0|abc$ 共8種情形。但如果我們遇到一個不負責任的老

師，他根本搞不清楚學生的名字，也不知道誰是誰，在他的眼中就會變成這樣：xx | x（左邊有兩人，右邊只有一人）、x | xx、0 | xxx 及 xxx | 0 四種情形。

因為他不認識任何一個學生，無法說出學生的不同，所以在他的眼中，分辨學生這件事情是沒有意義的。這就是我們會得到不同答案的原因，而這也就是玻色統計中最主要的精神：光子是不可分辨的，我們永遠說不出來它們之間有何不同。所以在量子統計理論下，我們的眼睛就如同那不負責任的老師一般，只能看到4種情形而已。其實這與高中所學的排列組合中，全同物分配問題的內涵是完全一樣的，上述的問題就如同在問：把3顆同樣的球分到兩邊的方法有幾種？

以下試就玻色統計與古典統計理論間的差異做進一步的說明。在古典統計理論中，粒子是可分辨的且能量是連續的，而粒子隨能量分布的機率（P），會隨著能量的增加呈指數函數的遞減（在系統中，能量愈高的粒子個數愈少），這是古典統計的特徵。

玻色的統計方法則採用完全不同的思考模式。他認為頻率是 ν 的光



在古典統計中，粒子（或輻射波）擁有能量E的機率，會隨粒子能量的增加而呈指數函數的遞減。

裡，每個光子的能量都是 $h\nu$ （這是量子論的假設前提），而且光子是不可分辨的，如同上述的例子，粒子的可能分布情形會大為減少，因此粒子的分布機率應該與古典統計的不同。於是他就著手重新計算光子擁有能量E的機率。

就像把學生分配到兩邊（兩個狀態）一樣，我們把光子分配到所有可能的光子狀態。在計算能量是 $h\nu$ 的光子出現的機率時，應是把所有可能組合的機率加起來。如果光子是可分辨的，則在系統中光子被發現的機率，會隨能量的遞增（即光子群聚在一起數目增加）呈指數式的遞減。但因為光子不可分辨，我們可以發現的可能組合數變少，因而每一組合的機率就會變大。

玻色認為黑體輻射既是光子，那麼在統計時也應該遵守能量不連續、粒子無法分辨的機率規則，這麼一來玻色計算出來的結果，恰與蒲朗克所做的計算及實驗結果完美地契合，這正是玻色統計最重要的貢獻。

而這也說明了因為分布情形數目上的差異，以至於在古典統計理論中會重複計算一些光子的狀態，所得到的光能量密度會比實驗的大很多，所以需要用到蒲朗克的方法加以修正。但如果我們運用玻色的想法重新計算在某溫度下，黑體輻射內光子擁有頻率 ν 的可能組合數，乘上光子具有的能量（這數值結果就是黑體輻射出來的輻射能），就會直接得到與實驗十分吻合的結果。

此後人們發現不僅僅只有光子遵守這種統計方式，在自然界中還有其他許多的基本粒子也遵守玻色的統計

法則，於是就把這些遵守玻色統計方法的粒子稱為玻色子。

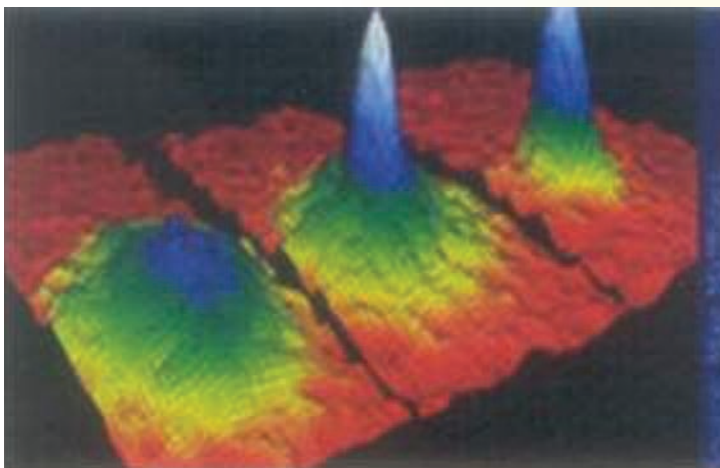
千里馬與伯樂

然而在1923年玻色剛提出這說法時，並不受到重視，他最初把這篇論文投稿到英國《哲學雜誌》（*Philosophical Magazine*）時，甚至遭拒。假若這篇論文能夠提早現世，在推展其他量子統計模型時，或許可以少走一些冤枉路。

古典統計理論的缺陷雖然可以由蒲朗克的假設完美地修正，但蒲朗克做的僅是假設黑體輻射的能量是 $h\nu$ 的整數倍，他只取整數點的部分計算，在捨去其餘非整數量的結果下，恰好使得理論與實驗結果相符，但他並不知道自己為什麼要這麼做。也正因此蒲朗克所得到的結果雖然與實驗吻合，但對於統計力學的發展並無太多實質上的幫助。

而玻色統計之所以重要的原因正是在此，他再一次地證實了愛因斯坦的光量子說正確無誤，並藉此修正了蒲朗克的計算方法，重新給了正確的詮釋。我們不需要知道能量是如何集結在一起的，要知道能量的多寡，只要數光子就夠了，只要有光子存在，那狀態就具有能量，只是光子分布的情形並不如古典統計中所預期的那樣多而已。而這樣的想法使得無論在數學的計算上或物理意義的思考上，都變得更加簡潔方便與清晰。

然而我們並不能責怪當時的人們，因為那時物理學界正瀰漫著詭譎氣氛，許多有名望的大師級人物對於量子論一直都抱著半信半疑的心情，包括蒲朗克自己。雖然量子論可



實驗室觀測到的玻色－愛因斯坦凝聚現象

以完美地解釋實驗結果，但由於他們長久以來受到古典物理的洗禮，對於這跨時代的嶄新想法根本無法想像，更遑論熟悉了。這種情形直到同年的康普頓效應被發現後才有了改觀，這個跨時代的觀念也才逐漸被物理界普遍接受與運用。

這也就難怪，對於一個來自印度加爾各答的年輕教授玻色而言，之前並沒有任何值得讓人眼睛一亮的成就，也沒有大師級的人物替他背書，再加上他修正的正是1918年得到諾貝爾獎肯定的蒲朗克大師的得獎論文，這種種因素都使得他所提出的觀點，在當時未被重視。

還好玻色不甘自己的心血付諸東流，他想起了在1916年左右，爲了把廣義相對論譯成英文，與當時已享有盛名的愛因斯坦有過信件上的往來。於是決定求助愛因斯坦，期待愛因斯坦能肯定他論文的價值，並運用其影響力把它推薦給德國的雜誌。而愛因斯坦也沒有令玻色的期待落空，他很快地就看出玻色所做的工作有多麼重要，並且知道玻色的統計方式能把他自己提出的光子想法，應用到更廣泛的物理系統上。

於是愛因斯坦親自把該篇論文譯成德文，在當年（1924年）7月初以玻色的名義投稿至《物理學刊》（*Zeitschrift für Physik*），並附言說：「依我看來，玻色推導蒲朗克公式的方法實爲一重要的里程碑。該方法也可用來推演理想氣體的量子理論，不久我將發表其詳細結果。」而正如愛因斯坦本人所說的，他在短短數月中把玻色的理論

廣泛地應用在其他粒子上，例如質子與中子數目和是偶數的原子核（如氦原子核）的物理系統上，並把它發展到極致。

他在隔年元月發表了結果，試著用德布羅意（de Broglie）1924年11月博士論文中提出的物質波，來合理解釋玻色的獨特計算方法，並預測了現在稱爲「玻色－愛因斯坦凝聚」的現象。而這也就是爲什麼我們現在

習慣稱玻色子統計方法爲玻色－愛因斯坦統計的原因，因爲若不是愛因斯坦，這理論也不會發展得這麼迅速及受到重視（註）。

這整個事件的發展正是愛因斯坦具有敏銳洞察力的又一個例子，無論是提出光子說，或給予玻色統計正確的評價，還是提出了「玻色－愛因斯坦凝聚」的現象，在在都說明了他的洞察力遠遠超越他同時代的人。

很少人知道愛因斯坦到底是如何作出他那眾多預言的，尤其是他所作的預言離日常生活的經驗甚遠。然而時至今日，經過驗證，當時他所預測的幾乎都是對的，他的思維總是領先別人一大段距離。

關於玻色－愛因斯坦統計這件事情，彷彿只是愛因斯坦科學生涯中微不足道的一個小貢獻而已，畢竟愛因斯坦所做的事情實在太多了，然而這卻是玻色足以名留青史的全部。在接下來的時光中，有更多的物理學家前仆後繼地走向這條驗證愛因斯坦所說預言的艱辛路程，但他們的名字則多被人遺忘。 □

註：在隔年（1925年），費米與狄拉克提出了粒子所遵守的另一種統計方式，稱爲「費米－狄拉克統計」。遵守這種統計方式的粒子被稱爲「費米子」，在自然界中屬於費米子的粒子有電子、質子、中子等。費米－狄拉克統計和玻色－愛因斯坦統計是統計力學的兩大基石，在自然界中的基本粒子必定符合其中一種統計方式。

王馨儀
台灣大學物理研究所

玻色統計與愛因斯坦