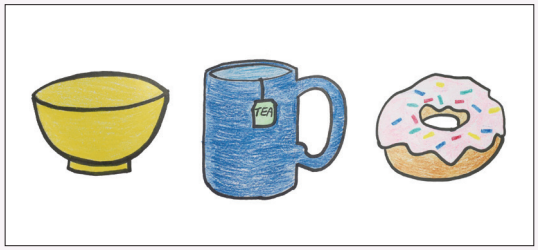
2016 年諾貝爾物理獎—以拓樸概念解開物質的奧祕

陳則銘

拓樸材料因具有某些被拓樸保護而幾乎不受環境影響的物理性質，使它們在一些新穎的科技中有非常重要的應用潛力。

2016 年的諾貝爾物理獎由 3 位英國學者共同獲得，其中 1 / 2 的獎金頒給目前任教於美國華盛頓大學的 David J. Thouless，其餘 1 / 2 則由美國普林斯頓大學的 F. Duncan M. Haldane 及美國布朗大學的 J. Michael Kosterlitz 分享。這 3 位學者獲獎的主要貢獻是「物質的拓樸相變及拓樸相態的理論發現」，這個發現不僅開啟了人們對不同於傳統四態（即固態、液態、氣態、電漿態）及傳統相變的全新領域的探索，也對當前材料、電子科學及量子電腦的發展有重要的影響。

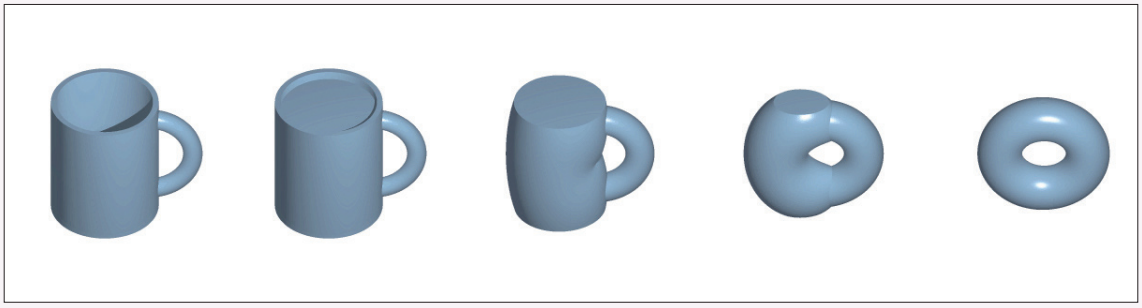


碗、馬克杯與甜甜圈 3 個幾何結構的虧格分別是 0、1 與 1。（圖片來源：蕭惠盈繪製）

本文將從數學的拓樸學開始，慢慢地帶引讀者進入 2016 年諾貝爾物理獎的研究主題。

什麼是拓樸

拓樸（topology），根據牛津字典的定義，是在數學上一門鑽研不會受到形狀或大小的連續變化而改變的幾何性質。在進一步了解這句話之前，可以先來看個簡單的問題：就幾何形狀來看，碗、馬克杯、甜甜圈這 3 樣東西，哪兩個看起來比較相似呢？



馬克杯可經由連續的形變而轉變成甜甜圈。在拓樸學上，馬克杯與甜甜圈稱為同胚，也就是具有同樣的拓樸性質。（圖片來源：維基百科）

直覺上會覺得碗和馬克杯較相似，但從數學拓樸的概念來看，馬克杯跟甜甜圈其實才是相同的。怎麼會這樣呢？可想像玩黏土時，你可以靠著拉扯、扭曲各種形狀或大小使其連續變化，而把馬克杯捏成甜甜圈。但你無法靠著拉扯等連續變換把碗變成馬克杯或甜甜圈，因為需要創造出一個洞，而不管是用挖的或用其他方式創造出一個洞，都不是連續變換。

在拓樸學上，球、碗這些沒有洞的幾何形狀屬於同一類，因為它們彼此可以藉由連續變化而轉變成對方，但馬克杯和甜甜圈這些有一個洞的幾何形狀則屬於另一類。簡單來說，這類幾何圖形中洞的數目並不會受到連續的形變而改變，而這個不變的量就稱為拓樸性質，另稱拓樸不變量，在拓樸學上，這些「洞」則稱為「虧格」。另外，從這個例子也可以看出，拓樸結構若要改變，須以整數倍變化。

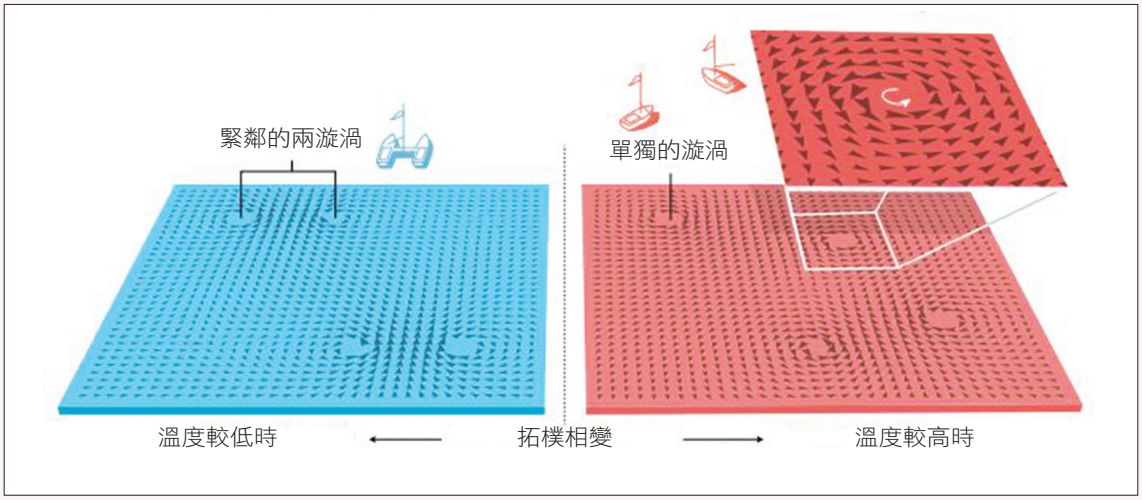
拓樸的概念也可以藉由物體表面曲率（也就是所謂的高斯曲率）來了解。當年，高斯在研究封閉曲面的幾何特性時發現，儘管可以對曲面做不同的變形而改變每一點的高斯曲率，但若把每一點的曲率都加起來（實際上是積分起來），其總和並不會隨著這些連續的形變而有所改變，且這曲率總和會等於 2π（$2-2\times$虧格數），這就是著名的 Gauss-Bonnet 定理。

例如，儘管馬克杯和甜甜圈在每一點的曲率都不同，但其積分後的曲率總和都是零。在變化過程中，每個幾何圖形的曲率總和也都是零。換言之，幾何中的曲率總和是一拓樸性質或拓樸不變量。

拓樸與物理的第一次邂逅

在固態物理的研究中，發現物質在極低溫的環境中常會產生一些奇異的現象，這物質會轉變成完全不同的狀態（或稱相態），譬如人們熟知的超導體或超流體。而從一般導態或流體態轉變成超導態或超流態的變化，稱為相變。

2016 年諾貝爾物理獎 3 位得主的發現
對當前材料、電子科學及量子電腦的發展有重要的影響。



KT 相變示意圖。在低溫情況下，不同方向旋轉的漩渦會緊鄰在一起而形成總漩渦量是零的一對。當溫度上升到相變溫度時，兩個漩渦會突然分開。（圖片來源：2016 年諾貝爾物理獎新聞稿）

與氣態、液態、固態間的相變相似之處在於，隨著溫度降低，這系統會越來越有次序，並在相變時破壞了其原本具有的對稱性。而差異之處在於傳統相變是原子或分子的排列變得更有次序，但在超導或超流則是量子相位變得有次序。然而在 1960 年代時，如超導或超流這樣的相態，普遍認為無法存在於薄膜狀的二維度系統中，因為次序現象無法在低維度系統下形成，因此不可能會有任何相變存在。

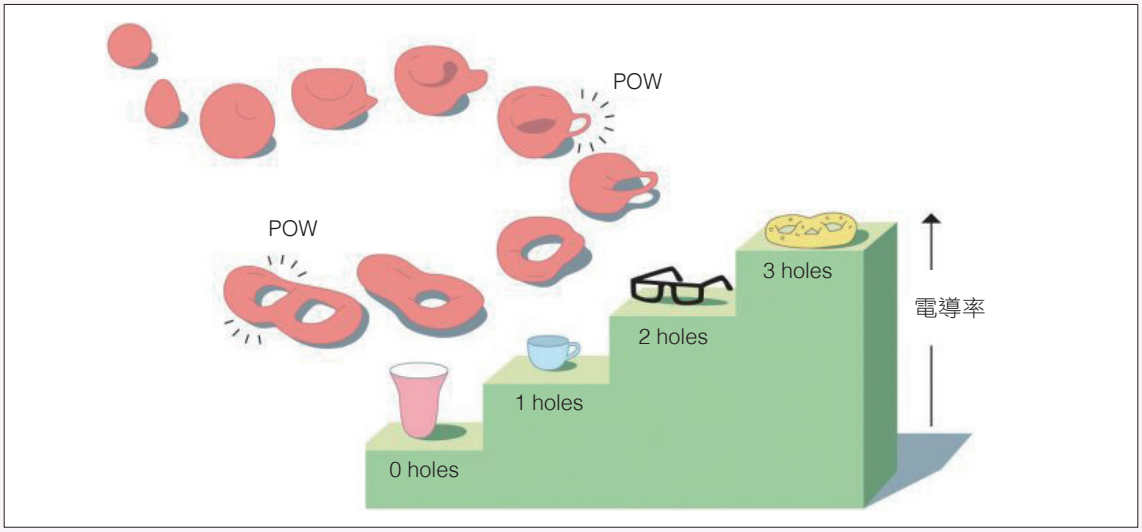
但在 1972 年，Michael Kosterlitz 和 David Thouless 這兩位諾貝爾獎的得主推翻了這個當時的主流理論，他們引進拓樸概念證明超導及超流確實可以存在於二維系統中，並以它解釋其機制及相變。Kosterlitz-Thouless 相變（簡稱 KT 相變）之所以重要，在於它與以往相變的觀念及機制完全不同，這 KT 相變是一個拓樸性質改變的相變，跟以往相變需破壞對稱性的機制完全不同。也就是說在拓樸相變前後該系統都處於一個相對無序的狀態，改變的是這系統的拓樸性質。

KT 相變可用一個簡單的圖像來解釋。在一平面系統中，量子相位（若以箭頭表示）會在各處形成漩渦狀結構，而這些漩渦就像是拓樸的洞。也就是說，當處理某個物理量需積分不同路徑時，沒有包含到漩渦的路徑跟有包含到一個漩渦的路徑會有不同的拓樸量。

Kosterlitz 和 Thouless 發現在極低溫的情形下，相反方向的漩渦會緊鄰在一起，使其總漩渦量為零。也就是說，絕大多數的路徑（除非你從兩緊鄰的漩渦中間穿過）都不會包含到漩渦量。而當溫度升高到某一相變溫度時，緊鄰的漩渦會突然分開，而這些獨立拓樸洞的增加顯然改變了這系統的拓樸性質及物理特性。

第一個被發現的拓樸態—量子霍爾效應

相信大家在高中時都學過霍爾效應（Hall effect），它是指若把一導體置於磁場中並通以電流，則這物體內的電荷載



拓樸性質的改變以及其對應的量子霍爾平台的示意圖（圖片來源：2016 年諾貝爾物理獎新聞稿）

子會因感受到磁力而偏往一邊移動，進而產生電壓（霍爾電壓）的現象。這現象於 1879 年由 Edwin Hall 發現，因此以他命名。

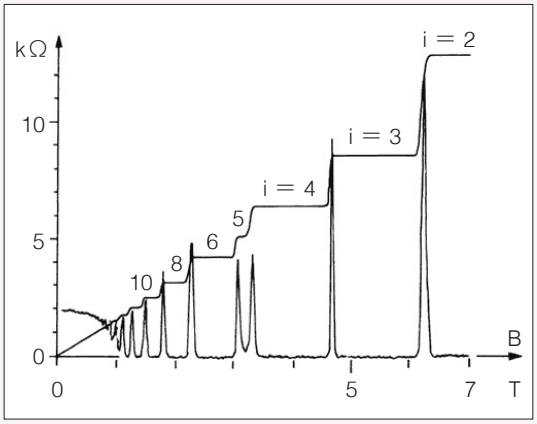
而量子霍爾效應的差別在於，當這導體是二維度系統（如僅有數個原子層的薄膜或不同材料相接的界面處）且在低溫高磁場的情況下，這霍爾電壓相對於磁場作圖會出現量子化的平台結構。這量子霍爾效應於 1980 年由 Klaus von Klitzing、Gerhard Dorda、Michael Pepper 3 人共同發現，而這發現於 1985 年獲得諾貝爾物理獎。

有趣的不僅是平台結構的出現，這平台結構的位置若以電阻為單位（也就是把霍爾電壓除以給予的電流強度 $R_H = V_H / I$），將非常精準地落在電子電荷平方 e^2 與普朗克常數 h 所形成比值的整數倍的倒數。以數學公式表示則是：

$$R_H = h / ie^2$$

這裡的 i 是一整數。

而電阻能極度精準地（其精準程度小到數十億分之一）落在某串數值，這件事著實令人甚為驚訝。因為眾所皆知幾乎所有的



量子霍爾效應。霍爾電阻 R_H 隨著磁場 B 增加以階梯狀的方式上升，每個階梯的高度是非常精準的 h / e^2 除以整數 i。這樣的精準度使得量子霍爾電阻於 1990 年後被當作國際標準電阻。（圖片來源：1998 年諾貝爾物理獎新聞稿）

固態材料都無法避免雜質的存在，而這些雜質會造成電荷載子的散射（scattering），影響其在導體內的運動，當然也就影響了電阻值。也就是說，就算量子力學能夠把這些電荷載子的能量量子化，進而使得霍

爾電阻出現類似量子化的平台結構，但雜質的存在理應會影響霍爾電阻值，而使其無法精確地落在理論值上，但其實不然。

隨後的研究更進一步證實了這精準數值也不隨受量測樣品的大小、形狀、雜質多寡，以及所在的溫度、磁場等參數的改變而有所影響。這一極度精準且不太受環境影響，以及若要改變就須以整數倍變化的量子霍爾平台結構的奧妙現象，背後必定有什麼重要法則存在。而這似乎與我們前面提到的拓樸概念不謀而合。

1982 年，David Thouless 及其合作伙伴發展出一套理論，並用拓樸概念來解釋為什麼量子霍爾效應的平台會如此精準。在此，可用一個簡化的圖像來理解量子霍爾效應及其對應的拓樸態。

在量子力學的運作下，當一個二維平面導體處在低溫強磁場下，電子只有在這物質的邊緣才能移動，在這物質中間區域的則都無法移動。也就是說，原本的導體變成了一個中間是無法導電的絕緣體，而邊緣是線性導體的奇異相態。除此之外，這邊緣導體也與傳統導體有所不同，如其電子只能存在於被量子化的能態，稱為邊緣態，以及電子只能以同一方向繞著中間的絕緣體移動。

這樣的相態其實就是個拓樸相態，中間那些電荷載子無法進入的區域就如同前例幾何圖形的洞，或把它想成一無限長的圓柱，電子能傳輸的那些邊緣態則可視為一個個套在這圓柱上的橡皮筋，邊緣態的數目（也就是橡皮筋的數目）將決定其導電率。可想而知，若要增加或減少橡皮筋的數目，非得進行剪斷、接合這種破壞其拓樸性質的非連續變化。

而由這些具拓樸性質的邊緣導體所決定的電導率（電阻率的倒數），也如同其他拓樸量一樣以整數倍變化。且顯而易見的，這橡皮筋的大小、形狀、雜質等因素都不會影響這個拓樸性質，這個理論解釋了為什麼量子霍爾平台能如此精準地落在某串數值上。而自 1990 年起，這樣的精準數值已被全世界度量衡標準當局做為衡量電阻的標準。

新穎的拓樸相態、拓樸材料及其應用

在 Thouless 等人用拓樸概念解釋了量子霍爾效應的 6 年後，1988 年 Duncan Haldane 另提出一模型證明不需要磁場及藍道能階，也能產生如量子霍爾效應這樣的拓樸相態。這個概念直到 2014 年才被實驗證實。除此之外，Haldane 也在 1983 年證明了一維的磁性長鏈也具拓樸性質，這是一全新的拓樸態。

到了今日，已經在理論及實驗上發現許許多多不同的拓樸態，不只是在前面提到的二維平面及一維直線，甚至在日常生活裡常見的三維材料系統中也發現許多不同的拓樸態，如近十年相當熱門的拓樸絕緣體、拓樸超導體。這些拓樸材料因具有某些被拓樸保護而幾乎不受環境影響的物理性質，使它們在一些新穎的科技，例如能承受環境干擾而具良好容錯特性的量子電腦中，有非常重要的應用潛力。

陳則銘
成功大學物理系