取樣技術之研究

第六報　放射率測定技術改良之研究

汪　厥　明

國立臺灣大學農學院

摘　要

I. 作者民國五十二學年度研究第五報中，曾述及「在 SB(C^{14}) 場合，2秒鐘一次，重複測定150次，可得穩定性較高的機樣。但未涉及其詳細研究經過。擬在第六報中敍述之。爲研究此一問題，作者曾以2秒鐘一次，做過17種不同的重複次數（以 n'_i 代表之，包括 $n'_i=150$ 在內）。每一種重複次數 n'_i 又反復做過10次的 RR 測定，其結果獲得其大度（n'_i：Sample Size）不同的17種機樣（Random Samples），每種機樣又有 10 個不同的重複機樣（Ten Replicates of Each Size）。SB 及 BG 兩場合算，這一回共計測定3,1900次，測得3,1900個基本數字資料。根據這些基本數字，做過各種統計分析。

II, 首先利用 James 氏卡方法，計算卡方 $\chi^2(\bar{x}_i)$，又利用修改 Bartlett 氏卡方法計算 $\chi^2(s_i^2)$，各得17種卡方，SB 及 BG 的 RR 兩場合，合計共得68種不同的卡方。經過顯著性測驗後，獲悉：於 SB 的 RR 場合，17種 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 之中，有 $n'_i=20,40,100,135$ 及 145 等5種 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 是顯然存在着。17種不同的 $\chi^2(s_i^2)$ 之中，有 $n'_i=110$ 及145時的兩種 $\chi^2(s_i^2)$ 係顯著存在着。BG 的 RR 場合，17種 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 之中有 $n'_i=40, 80, 90$，及 110 等 4 種機樣經證明顯或極頂顯著地存在着。又在17種 $\chi^2(s_i^2)$ 之中，$n'_i=80$ 時10個不同重複機樣間不穩定性（以 χ^2 表出之）是顯然存在着。該等卡方顯著的機樣大度 n'_i（亦即重複次數）因爲不穩定性存在着，均不能採用，自不在話下。

經使用第四報的 $(\sqrt{2\Sigma\chi_i^2}-\sqrt{2\Sigma\chi_j^2})/\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{\Sigma\chi_i^2}-\sqrt{\Sigma\chi_j^2}$ 式測驗結果，證明：SB及BG的RR兩場合 $\Sigma\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $\Sigma\chi^2(s_i^2)$ 兩者間差異係顯然存在着，綜合的機樣平均 $\bar{x}_i$ 的變化較其均方 s_i^2 爲大。其次又證明：BG 的 RR 和 SB 的 RR 間，勿論以 $\bar{x}_i$ 或 s_i^2 而言，兩種機樣的不穩定性間雖有差異但其差異，在統計上並不顯著。

III. 在上述曾用卡方表出 RR 機樣的不穩性（Unsteadiness）比較表出有時不甚方便。爲便於瞭解及顯著性測驗計，又創設穩性(Steadiness)，以卡方倒數例如 $1/\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $1/\chi^2(s_i^2)$ 表出穩性程度，而以 $(\chi_i^2/\chi_j^2)\times100$: $(\chi_i^2<\chi_j^2)$ 表出相對穩性（RS: Relative Steadiness）從統計學理論，證明 (χ_j^2/χ_i^2) 實係 Snedecor's F，其分布當然是 F 分布（F−Distribntion），故該 F 可用於穩性的顯著性測驗。經過此種測驗結果，證實；以 χ^2 的大小表出不穩性和以 $(\chi_i^2/\chi_j^2)\times100$ 表出相對穩性，關於顯著性測驗一點看來，兩者雖非完全一致。但亦無相違悖之處，而各有其長處。用上述方法測驗 $n'_i=150$ 的機樣的不穩性，並無顯著的存在着。又關於相對穩性，以 SB 的 RR 場合爲例，$n'_i=110$ 時其 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 爲最小，因而以其 RS 爲 100%，以此爲基準，可知 $n'_i=150$ 時 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 的 RS 爲63.13%，較前者少約37%，該差數未能證實其存在。$n'_i=150$的其他 $\chi^2(s_i^2)$ 的RS，以及 BG 的 RR 場合，$\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 的 RS 均不顯著。

IV. 除用上述顯著性測驗方法之外，又用作者曾用於研究第五報的方法算出各 RR 的機樣的 $c.v.$ 則見無論以 SB 或 BG 的 RR 而言，$n'_i=150$ 其 cv 均較小而其等級相同均為 2 級，由此可知：其測定值 x_i 變異性之小，無出其右者。經過上述各種測驗及考慮：決定重複測定次數 $n'_i=150$ 的機樣，堪充 RR 測定之用。重複150次需時300秒，300秒適等於 5 分鐘恰與目下流行的 5 分鐘一次者測定所需淨數時間相等。作者已證明後者 5 分鐘一次者所測得 RR 過低。

V. 於自由度够大時除用 $(\sqrt{2\sum\chi_i^2}-\sqrt{2\sum\chi_j^2})/\sqrt{2}$ 或$\sqrt{\sum\chi_i^2}-\sqrt{\sum\chi_j^2}$ 測驗卡方合計間差異顯著性之外，作者在本研究報告書中，又添設 Fisher's Z 法：

$$Z=\frac{1}{2}\log_e F$$

式中 F 係 Snedecor's F。如供測的每個卡方的自由度 $n_i=n_j=n$，如此則兩種卡方合計各由卡方合計而成（在本研究中 $k=17$），其自由度合計必為 kn, Z 的頻度函數 $\phi(Z)$ 必為：

$$\phi(Z)=2\beta^{-1}[1+e^{2Z}]^{-kn}$$

式中 $e^{2Z}=F$，上式所代表的 Z 分布的平均 $\mu(Z)$ 及變方 $\sigma^2(Z)$ 如次：

$$\mu(Z)=0$$

$$\sigma(Z)=1/\sqrt{kn}$$

其分布曲線之左右兩邊以縱座標軸（Ordinate）為對稱軸，如 kn（在本問題 $kn=153$）够大，則此時的 Z 分布接近常態分布，故可將 Z 化為標準常態值：$Z\sqrt{kn}$，而以常態分布理論處理顯著性測驗問題，如 $Z\sqrt{kn}$ 大於雙尾機率積分的顯著水準 .05點的數值 1.96，則 $Z\sqrt{kn}$ 係顯著的。該 Z 法和以前的 $\sqrt{\sum\chi_i^2}-\sqrt{\sum\chi_j^2}$ 法，其結果大致相同。吾人可選其便利而合理者用之。

VI. 作者曾使用 Kendall 氏 χ^2 及 τ 法測驗 n'_i, SB: $x^2(\bar{x}_i)$, SB: $\chi^2(s_i^2)$·BG: $\chi^2(\bar{x}_i)$ 以及 BG: $x^2(s_i^2)$ 等五項間等級相關，其結果獲悉：該五項目的大小順序間無一定關係。

I. 引　　言

作者民國五十二學年度研究報告書（第五報）中，曾說過：「在 SB(C^{14}) 場合，2 秒鐘一次，重複測定 150 次，可得穩定性較高的機樣」。但未涉及其詳細的研究經過。擬在此敘述其理由。

關於如何獲得機樣的較高穩定性？這是相對性的問題。作者以 2 秒鐘一次，不同重複測定次數 $n'_i=20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150$ 等17種，測得17種不同的機樣，每種機樣各重複到10盤，共測170盤，共獲得了 1,5950 個基本數字，每個數字代表一個 RR (Radioactivity Rate) 的測定值。此種測法曾前後做過 3 回，每回各得10組，每組包含17種不同的機樣，3 回共30組。前後曾測定 BG 及 SB 各 4,7850 次，共測得 9,5700.00 個數字資料（按即 RR 的測定值）。該等 30 組的基本數字之中，前兩回測定時用較舊的 G–M 兩氏計數機（Geiger-Müller 兩氏的 Counter，該舊機由美國某大學所贈），第三回的測定時，發現計數器（Scaler）有異常數字的出現，和臺大同位素室主持人商洽，改換新機從新測定，因為新舊兩機效能（Efficiency）不同，所以測出數字亦相異。尤其第二回所測定數字，到後來有若干異常的不規則數值摻雜其間，亦可能使其和其他 2 回所測定的有歧異之處。今試先就第一回所測數字資料所做穩定性（Steadiness）及變異性（Variability）的研究經過報告如下。

II. 第一回測定數字的分析研究

第一回合 BG 及 SB 的 RR 各測定1,5950次，兩者合計共得3,1900個基本數字，根據這些基本數字算出：SB 及 BG 的 RR 兩場合各種 n'_i 的平均 $(\bar{x}_i)$ 的卡方 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 以及均方 (s_i^2) 的

卡方 $\chi^2(s_i^2)$，一如表Ⅱ·1所示者：

表Ⅱ·1　從第一回測定數字算出各種 n_i' 的 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 表

SB			BG		
n_i'	$\chi^2(\bar{x}_i)$	$\chi^3(S_i)$	n_i'	$\chi^2(\bar{x}_i)$	$\chi^2(S_i)$
20	16.9602(13)*	4.6819(2)*	20	14.3321(11)*	4.0374(1)*
30	8.1917(4)	5.3903(3)	30	6.0554(3)	5.7957(5)
40	23.0946(17)	6.6499(6)	40	17.1347(14)	5.2019(2)
50	15.4451(11)	9.9455(11)	50	4.7225(1)	10.4045(13)
60	13.3711(9)	13.1633(14)	60	8.8650(5)	8.7836(10)
70	8.2492(5)	4.6634(1)	70	11.8434(9)	6.2903(7)
80	11.6348(7)	8.4055(8)	80	40.1632(17)	18.5592(17)
90	16.0098(12)	11.8130(13)	90	19.4863(15)	12.3014(15)
100	17.3533(14)	5.7803(4)	100	9.4830(6)	10.2544(12)
110	6.5970(1)	16'6441(16)	110	19.7365(16)	8.7197(9)
120	6.8508(2)	8.9929(10)	120	14.6624(13)	5.6414(4)
125	11.7077(8)	5.9038(5)	125	10.0031(7)	7.0393(8)
130	7.6523(3)	8.6299(9)	130	11.1882(8)	16.2604(16)
135	18.9431(15)	10.6203(12)	135	14.4349(12)	5.8779(6)
140	14.5659(10)	13,5354(15)	140	5.4729(2)	5.3727(3)
145	19.6915(16)	17.1998(17)	145	13.4908(10)	11.6051(14)
150	10.4445(6)	7.2580(7)	150	7.8653(4)	10.2424(11)
合　計	226.7626	159.2773		228.9397	152.3873

* 括弧中數字係等級號數（由小而大：Ranks）

表 Ⅱ·1 中所示各卡方乃根據 James 氏法及修改 Bartlett 氏法分別算出者，其自由度均爲 9，表出各 n_i' 次（n_i' 爲數越大，即表示機様亦越大），「2秒鐘一次」，重複測定所得機様的穩定性，但 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$（按即爲機様平均 $\bar{x}$ 及其均方 s_i^2 的卡方）和機様穩定性相反比例，換言之，$\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 越大，則機様穩定性越小。如其卡方數值超過 9 自由度的.05顯著水準的 ${}_9\chi^2_{.05}=16.919$，則該 n_i' 次測得之機様缺乏穩定性可能很大。這種重復次數 n_i' 不可應用於 RR 之測定。試舉例以明之。試觀表Ⅱ·1SB 場合以 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 而言：

$$n_i'=20,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=16.9602;$$
$$n_i'=40,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=23.0946;$$
$$n_i'=100,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=17.3533;$$
$$n_i'=135,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=18.9431;$$
$$n_i'=145,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=19.6915;$$
$$n_i'=110,\qquad {}_9\chi^2(s_i^2)=16.6441;$$
$$n_i'=145,\qquad {}_9\chi^2(s_i^2)=17.1998。$$

故在測定 SB 的 RR 時以不用 $n_i'=20, 40, 100, 110, 135,$ 及145, 等6種重複次數爲佳，否則，很可能得不到穩定性機様，也就是說：得不到穩定機様的平均 $\bar{x}_i$ 及其均方 s_i^2。

今又觀表Ⅱ·1的 BG 場合，則見：

$n'_i=40,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=17.1347$；

$n'_i=80,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=40.1632$；

$n'_i=90,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=19.4863$；

$n'_i=110,\qquad {}_9\chi^2(\bar{x}_i)=19.7365$；

$n'_i=80,\qquad {}_9\chi^2(S_i^2)=18.5592$。

綜合 SB 及 BG 兩場合由平均 $\bar{x}_i$ 及 s_i^2 之穩定性觀之：$n'_i=20, 40, 80, 90, 100, 110, 135,$ 及145等 8 種，n'_i 重複次數不可應用，還有 BG 場合 $n'_i=130$，其 ${}_9\chi^2(s_i^2)=16.2604$很接近${}_9\chi^2_{.05}=16.919$，亦以不應用爲上策。其餘 30, 50, 60, 70, 120, 125, 140 及150 等 8 種雖對於穩定性不慮有他，還須用另外的標準以檢定其優良性。以上的檢定是以機樣的平均 $\bar{x}_i$ 及均方 s_i^2 爲標準的。今後復用機樣內單一變值 x_i 的變異性爲標準以檢定之，當然 x_i 變異性較大者不取。這種測驗普通用變異係數（Coefficient of Variation）C.V. 表出之，從第一回測定數字資料，計算 BG 及 SB 的 RR 的 *c.v.* 列於表Ⅱ·2。

表Ⅱ·2　從第一回測定數值算出 BG 及 SB 的 RR 的 *c.v.* 表

各種 n'_{i_0} 的 *c.v.* (變異係數)				
n'_{i_0}	BG (%)	等　級	SB (C^{14}) (%)	等　級
20	74.79	1	59.65	4
30	82.69	9	62.49	9
40	79.58	5	57.73	1
50	84.50	12	60.63	5
60	82.84	10	59.21	3
70	83.16	11	61.77	8
80	76.92	3	62.96	10
90	85.60	14	65.05	14
100	80.63	7	61.55	7
110	86.38	16	64.81	13
120	84.88	13	67.22	16
125	87.88	17	66.11	15
130	86.33	15	67.46	17
135	80.95	8	64.71	12
140	80.51	6	64.35	11
145	78.97	4	61.26	6
150	75.55	2	58.97	2

cv 的計算已詳於第五報，不再贅述。

試觀表Ⅱ·2則見 BG 及 SB 兩場合的 RR，其測定值 x_i 的變異性（以 *c.v* 表出者）在平均上較小，而又在 BG 及 SB 雙方等級數相等者，有如下三種重複 n'_i：

$n'_i=30$, BG:*c.v.* 的等級=9, SB:*c.v.* 的等級=9；

$n'_i=100$, BG:*c.v.* 的等級=7, SB:*c.v.* 的等級=7；

$n'_i=150$, BG:*c.v.* 的等級=2, SB:*c.v.* 的等級=2。

由此判斷可知：$n_i'=150$，換言之2秒鐘一次，重複測定至 $(n_i'=)150$次者，其機樣的 x_i（按即一次測定的 RR）的變異性在 BG 及 SB 兩場合 *c.v.* 等級相等而均較小；故以 $n_i'=150$ 次重複測定所得機樣，勿論以平均 $\bar{x}_i$ 及均方 s_i^2 觀之，抑或由機樣內單一雙值 x_i 的變異性觀之，均以 $n_i'=150$ 的機樣爲好。益之，2秒鐘一次，重複測定 150 次，所需時間爲300秒，合計爲5分鐘，和目下流行的五分鐘一次測定 RR 方法，對於測定的淨數總時間是一樣的。由統計理論而言，凡觀測或測定，其重複次數必須够多，一次測定的數字，其可靠性常較差。以此例而言：2秒鐘一次，重複測定至 $n_i'=150$次者，纔能保證機差的穩定性。再經後述 RS（相對穩性）及 F 測驗結果，亦和用 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 證明者並行，參看表Ⅱ·8，則見 BS 場合，$n_i'=11$ 時 RS=100，爲最大，其 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 作爲基準，和 $n_i'=150$ 時 RS=63.16 對照，有37％之差異經 F 測驗證明其不存在。

Ⅱ·1　2秒鐘一次和 $2n_i'$ 秒鐘的測定之比較

這一問題在作者研究第五報已述及之，試看下列一次2秒鐘和一次 $2n_i'$ 秒鐘 RR 測定實例比較表（表Ⅱ·3）：

表Ⅱ·3　一次2秒鐘和一次 $2n_i'$ 秒鐘 RR 測定實例比較表

（$2n_i'$ 秒鐘一次測定的 RR 過低實例）

BG				SB (C^{14})			
n_i'	$\bar{x}_{i0}$ (RR)	差　數	差數顯著性	n_i'	$\bar{x}_{i0}$ (RR)	差　數	差數顯著性
20	1.830（2秒） 1.535（40秒）	0.295**	極顯著	20	2.785（2秒） 2.265（40秒）	0.520***	極頂顯著
40	1.695（2秒） 1.518（80秒）	0.177*	顯著	145	2.857（2秒） 2.698（290秒）	0.159**	極顯著
150	1.792（2秒） 1.669（300秒）	0.123**	極顯著	150	2.920（2秒） 2.689（300秒）	0.231***	極頂顯著
300	1.588（2秒） 1.484（600秒）	0.104**	極顯著	300	2.683（2秒） 2.532（600秒）	0.151***	〃

* 表出顯著，差數發生機率小於 .05 水準者。
** 代表極顯著，差數發生機率小於 .01 水準者。
*** 代表極頂顯著，差數發生機率小於 .001者。

試看表Ⅱ·3，則見 $n_i'=150$ 次時

(1) BG 場合：

一次2秒鐘重複測定 150 次爲1盤，重複測定10盤者其平均 $\bar{x}_{i0}$（按即實測 RR）=1.792次。

一次300秒鐘（按即 $2n_i'=5$ 分鐘）重複測定10次者其平均 $\bar{x}_{i0}$（按即實測 RR）=1.669次（測定單位時間化爲2秒）

(2) SB 場合：

一次2秒鐘重複測定150次爲1盤，重複測定10盤其平均 $\bar{x}_{i0}$（按即實測 RR）=2.920

一次300秒鐘（按即 $2n_i'=5$ 分鐘）重複測定 10 次者其平均 $\bar{x}_{i0}$（按即實測 RR）=1.689（測定單位化爲2秒）

在 BG 場合一次2秒鐘所測定的平均 RR 較一次 (2×150) 300 秒鐘測定的平均 RR 多 .123 次，該差數發生的機率小於 .01 的水準，故極其顯著，其差數之存在無可否認。

又在 SB 場合，一次300秒鐘所測定的平均 RR 較一次 2 秒鐘測定的平均 RR 少 .231次，該差數的發生機率小於.001，故極頂顯著，其存在更無可否認。兩個截然不同的圖圖 (Items)，其中一方在理論上是合理的則他方就不合理，但從理論上（已詳於作者研究第五報）看來一次兩秒鐘的測定者較爲合理，而後者一次 300 秒鐘所測定的 RR 就不合理了。所以可以結論曰：「一次 300 秒（按即 5 分鐘）所測定的 RR 過低了」。但從理論推測，一次 $2n'_i$ 秒鐘所測定的 RR 不一定過低，亦有過高之可能，此一事實曾以試測實驗證明之，其經過詳於作者研究第五報，在此不再贅述。

Ⅱ·2　第一回測定資料各種重複次數 n'_i 的穩定性更深的研究

在此所謂穩定性（和英語 Steadiness 相當）係指平均 RR$\bar{x}_i$ 及其均方 (s^2_i) 的穩定性而言，當然 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s^2_i)$ 越大者其穩定性越小。如其中之一或兩者超過顯著水準，則其不穩定性已在統計上證實，因而該種重複次數 n'_i 不能採用。n'_i 次的測定數字資料由統計學上看來，實爲機樣的大度 (Size)。關於機樣之大度和 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s^2_i)$ 之大小是否有關係？的問題擬在此做一統計分析。

先將 SB 及 BG 兩場合的 n'_i SB:$\chi^2(\bar{x}_i)$, SB: $\chi^2(s^2_i)$, BG:$\chi^2(\bar{x}_i)$, 及 BG: $\chi^2(s^2_i)$ 等5者相互間有無等級順序的關係之存在，做一分析。其大小等級順序一如表Ⅱ·4所示者〔並參看表Ⅱ·1中括弧中號數，該號數即爲由小至大的等級順序〕

表Ⅱ·4　m排例等級相關表

		第一回測定資料																	合計
	n'_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	153
SB	$\chi^2(\bar{x}_i)$	13	4	17	11	9	5	7	12	14	1	2	8	3	15	10	16	6	153
	$\chi^2(s_i)$	2	3	6	11	14	1	8	13	4	16	10	5	9	12	15	17	7	153
BG	$\chi^2(\bar{x}_i)$	11	3	14	1	5	9	17	15	6	16	13	7	8	12	2	10	4	153
	$\chi^2(s_i)$	1	5	2	13	10	7	17	15	12	9	4	8	16	6	3	14	11	153
(T)		28	17	42	40	43	28	56	63	45	52	40	40	49	59	45	73	45	765

觀表Ⅱ·4等級個數 (n) 有17級（從表Ⅱ·1錄出），n'_i 重複次數的等級由小至大的順序和 SB及 BG 的 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s^2_i)$ 的大小順序是否一致？祇看表Ⅱ·4很難看出來，所以只好乞靈於 Kendall 的 m 等級排列 (Kendall's m Rankings) 測驗法測驗之，其公式如次：

$$\chi^2=\frac{12S}{mn(n+1)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{Ⅱ}\cdot1)$$

式中 χ^2 即係通常的 χ^2，其自由度 $(d.f.)=n-1$, n 係等級個數，m 係等級排列 (Rankinkings) 的個數。在表Ⅱ·4的實例，$m=5, n=17$, S 係合計欄中17個合計數字間平方和(Sum of Square)，亦可以 (SS)T 代表之，其計算方法如下：

$$\sum T^2=(28^2+17^2+\cdots\cdots+73^2+45^2)=3{,}7365.00$$

$$C=(\sum T)^2/n=(765)^2/17=3{,}4425.00$$

$$S=\sum T^2-C=3{,}7365.00-3{,}4425.00=2940$$

代入(Ⅱ·1)式，

$$\chi^2=\frac{12S}{mn(n+1)}=\frac{3{,}5280}{1530}=23.0588$$

$$d.f.=17\text{-}1=16,$$

查 χ^2 表16 $d.f.$ 的 ${}_{16}\chi^2_{.05}=26.295$, 所算得的爲 23.0588, 小於 $\chi^2_{.05}$，故不顯著。在統計上未能證

實上述5個等級排列間有相同順序的存在。其原因何在？未有抑一步的研究之前，難以明言。

Ⅲ·3 第一回資料一次2秒鐘測得 $\bar{x}_i$ 和 s_i^2 兩者間關係

同在 SB 或 BG 場合 $\bar{x}_i$ 和 s_i^2 兩者穩定性間，以及 BG 的 $\bar{x}_i$ 及 s_i^2 和 SB 的 $\bar{x}_i$ 及 s_i^2 兩者穩定性間，有無由小至大的共同順序之存在？詳言之，隨 n_i' 由小變大時機樣平均 $\bar{x}_i$ 及均方 s_i^2 的變化有無同一傾向？試逐條分析研究如下最好以 Kendall 氏等級相關 (τ) 公式，求出 τ 值，以測驗之：

$$\tau=\frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)}=\frac{2S}{n(n-1)}\quad\cdots\cdots(\text{II}\cdot 2)$$

上式中 n 仍係等級個數，S＝P－Q，P 爲等級排列中倆倆駢對時小者在左，大者在右的駢對個數，Q 係有相反方向的駢對個數，兩者抵銷結果剩餘的駢對個數，按卽 S＝P－Q。如 P>Q 則 S 爲正整數，否則爲負整數，正者表出兩個等級排列間有同一由小至大順序的關係，負者表出有相反的關係。因爲一個由 n 個等級排列而成的連系，注意其大小順序相順或相反，駢對種數有 $n(n-1)$，其中一半 $½n(n-1)$ 個合於由小至大順序，他半有相反的倒序。在等級排列中無一例序者，則 Q＝0 而 $S=P=\frac{1}{2}n(n-1)$ 相反的無一順序者，則 P＝0 $S=-Q=-\frac{1}{2}n(n-1)$ 前者 $\tau=1$，後者 $\tau=-1$，順序個數或倒序個數在中間者 P 及 Q 均非零，而 τ 在±1範圍內可能有任何正或負的小數。

因爲 S＝P－Q, 而 $P+Q=\frac{1}{2}n(n-1)$ 所以

$$S=2P-\frac{1}{2}n(n-1)\quad\cdots\cdots(\text{II}\cdot 3)$$

代入(Ⅱ·2)則得：

$$\tau=\frac{2P}{n(n-1)/2}-1\quad\cdots\cdots(\text{II}\cdot 4)$$

S 雖非連續變值，但等級個數 n 大於10，則S 於連續性（Continuity Correction）改正後，甚接近常態分布，其平均爲0，變方 $\sigma^2(S)$ 爲：

$$\sigma^2(S)=\frac{1}{18}n(n-1)(2n+5)\quad\cdots\cdots(\text{II}\cdot 5)$$

將 S 連續性改正並標準化後：

$$\frac{\text{改正 } S}{\sigma(S)}=\frac{S-1}{\sigma(S)}=(S-1)\left[\frac{1}{18}n(n-1)(2n+5)\right]^{-1/2}\quad\cdots\cdots(\text{II}\cdot 6)$$

因爲如等級個數 n 不變時 τ 和 S 正比例的，今以 C 代表 $\frac{1}{2}n(n-1)$，係常數，其倒數當然亦爲常數，(Ⅱ·3)的 τ 式可改寫爲：

$$\tau=\frac{1}{C}S$$

按照統計理論：S 如爲常態變值，則 τ 亦爲常態變值，S 的機率如爲已知者，則 τ 的機率亦可由此推知。所以 S 的顯著性測驗亦卽係 τ 的顯著性測驗。但 S 的測驗比較容易，自不在話下。試舉例以明之，第一回測定數字資料，SB 場合 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 BG 場合 $\chi^2(s_i^2)$ 之間等級相關顯著性測驗經過如次：$n=17$，

SB: $\chi^2(\bar{x}_i)$ 的等級：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
BG: $\chi^2(s_i^2)$ 的等級：	7	1	5	12	8	2	11	17	16	4	13	6	15	10	3	9	14

然後計算 P 得：

$$P=10+15+11+5+8+11+5+0+0+6+2+4+0+1+2+1=81$$

$$\frac{1}{2}n(n-1)=136 \quad 2P=162$$

$$\therefore S=2P-\frac{1}{2}n(n-1)=162-136=26$$

$$\sigma(S)=\left[\frac{1}{18}n(n-1)(2n+5)\right]^{-1/2}=\sqrt{(589.3333)}=24.2762$$

$$S-1/\sigma(S)=1.0298 \text{ 小於1.96故不顯著。}$$

$$P_r[\tau\geqslant|1.02981]=.1515\text{（機率積分）}$$

P 之計算：先看 BG: 上表 $\chi^2(s_i^2)$ 欄，第一等級數爲 7 ，在其右邊而較大等級號數共有 10 個，將其記載 P式的右邊，隨即將 7 消去，再看第二個等級號數爲 1，在其右邊，大於 1 的等級號數有15個，將其加入 P 的右邊消去 1 ，繼續進行至排列最後號數爲止，如上操作結果，得P＝81及 S＝26，代入（Ⅱ·6)式得標準常態值＝1.0298，其機率積分＝.1515，故不顯著。由此可知：SB 場合 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $\chi^2(s_i^2)$ 兩者間的共同順序之存在未能證實。

以上述方法測驗之結果列表如次：

測　驗　項　目	$S/\sigma(S)$	機率積分	顯著性
SB: $\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $\chi^2(s_i^2)$ 間	.2060	.4184	不　顯
BG: $\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $\chi^2(s_i^2)$ 間	.2474	.4023	〃
SB: $\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 BG: $\chi^2(\bar{x}_i)$ 間	(−.1236)	.4508	〃
SB: $\chi^2(s_i^2)$ 和 BG: $\bar{x}^2(s_i^2)$ 間	1.0298	.1515	〃

觀上表便知：$\bar{x}_i$ 和 s_i^2 兩者間不穩定性間大小順序無一定關係，所以Ⅱ·3節所述的 n_i' ；BG: $\chi^2(\bar{x}_i)$, $\chi^2(s_i^2)$, SB:$\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 等 5 個之間亦不會有共同順序之存在。

Ⅱ·4　機樣穩定性的比較和相對穩定性

所謂機樣係 RR 測定值的機樣，一個機樣特性往往可用其平均 $\bar{x}_i$ 及其均方 s_i^2 的特性表出之，所以機樣的穩定性，可用其平均 $\bar{x}_i$ 及其均方 s_i^2 的穩定性表出之。表出穩定性當然有各種方法，迄茲爲止，用 James 氏 χ^2 法算出 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 以表出機樣的不穩定性 ， $\chi^2(\bar{x}_i)$ 或 $\chi^2(s_i^2)$ 一方，或雙方越大者，其穩定性越小，係相反的比例，已如前述，換言之，$\chi^2(\bar{x}_i)$及$\chi^2(s_i^2)$係表出穩定的尺度，亦無不可。現在擬利用 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 來測驗某種機樣和機樣間差異的顯著性。試觀表Ⅱ·1則見：SB 及 BG 的 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 合計（以 T 表出之），分別爲

$$SB:\ \sum\chi^2(\bar{x}_i)=226.7626，\quad \sum\chi^2(s_i^2)=159.2773；$$

$$BG:\ \sum\chi^2(\bar{x}_i)=228.9397，\quad \sum\chi^2(s_i^2)=152.3873，$$

由這些合計總數觀之，SB 的 RR 機樣較 BG 的 RR 機樣略微不穩定 ，因爲 SB: $\sum[\chi^2(\bar{x}_i)+\chi^2(s_i^2)]=386.0339$ 大於 BG: $\sum[\chi^2(\bar{x}_i)+\chi^2(s_i^2)]=381.3270$ 故也。但該差異 4.7129(＝386.039−9381.3270) 是取樣變異呢？還是確實存在呢？須待測驗。今以研究第四報第五頁至七頁所載之測驗法測驗之，其結果列成表Ⅱ·7 ：

表Ⅱ·7 第一回測定機樣穩定性比較表

測 驗 項 目	標準常態值	雙尾機率積分	顯著性
SB: $\sqrt{\sum\chi^2(\bar{x}_i)}\sim\sqrt{\sum\chi^2(s_i^2)}$	2.440	0.0147	顯 著
BG: $\sqrt{\sum\chi^2(\bar{x}_i)}\sim\sqrt{\sum\chi^2(s_i^2)}$	2.786	0.0053	〃
$\sqrt{\{SB:\sum\chi^2(\bar{x}_i)\}}\sim\sqrt{\{BG:\sum\chi^2(x_i)\}}$	0.0707	0.9436	不顯著
$\sqrt{\{SB:\sum\chi^2(s_i^2)\}}\sim\sqrt{\{BG:\sum\chi^2(s_i^2)\}}$	0.2758	0.7827	〃
$\sqrt{\{SB:\sum\chi^2(\bar{x}_i)+\sum\chi^2(s_i^2)\}}\sim\sqrt{\{BG:\sum\chi^2(x_i)+\sum\chi^2(s_i^2)\}}$	0.0849	0.9323	〃
$\sqrt{\{SB:\sum\chi^2(x_i)+BG:\sum\chi^2(x_i)\}}\sim\sqrt{\{SB:\sum\chi^2(s_i^2)+BG:\sum\chi^2(s_i^2)\}}$	2.617	0.0089	顯 著

表Ⅱ·7中所載數字如何算出？有待說明。先參考表Ⅱ·1見有 SB 及 BG 兩場合的 $\chi^2(\bar{x})$ 的合計 $\sum\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 合計 $\sum\chi^2(s_i^2)$，該兩種合計的分布仍爲卡方分布（Chi-Distribution），其自由度均爲 153 遠超過 30。故可化爲標準常態值（Standardized Normal Variate），換言之：$\{\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2n-1}\}$ 係平均 $\mu=0$ 變方 $\sigma^2=1$ 的標準常態值。所以可用研究第四報所述的方法處理之。現以 $\sum\chi_i^2$ 代表某一卡方合計，以 $\sum\chi_j^2$ 代表另一卡方合計，其自由度兩方相同均爲 n。以表Ⅱ·1所代表的場合而言，$n=153$ 遠大於 30，故可用第四報測驗法測驗兩個卡方合計間差異的顯著性。試舉例以說明之：SB: $\sum\chi^2(\bar{x}_i)$ 爲 226.7626，而 $\sum\chi^2(s_i^2)$ 爲 159.2773兩個卡方合計之中前者大於後者，其相差數字爲 226.7626−159.2773＝67.4853，現對該差數舉行顯著性測驗如次：

$$\tau\,(\text{標準常態值})：\{\sqrt{2\sum\chi^2(\bar{x}_i)}\sim\sqrt{2\sum\chi^2(s_i^2)}\}/\sqrt{2} \quad\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot7)$$

$$\sqrt{2\chi^2(\bar{x}_i)}=\sqrt{2\times226.7626}=21.30,$$

$$\sqrt{2\chi^2(s_i^2)}=\sqrt{2\times159.2773}=17.85$$

$$\therefore\{\sqrt{2\chi^2(\bar{x}_i)}\sim\sqrt{2\chi^2(s_i^2)}\}/\sqrt{2}$$

$$=\frac{21.30-17.85}{1.414}=2.4400$$

其機率積分＝$P_r[\tau\geqslant|2.441|]=.0147$故顯著，通常 $\{\sqrt{2\chi^2}-\sqrt{2n-1}\}$ 的機率採用單尾機率積分。如此則2.44標準常態值的單尾機率積分爲.00734，但 $\{\sqrt{2\chi_i^2}-\sqrt{2\chi_j^2}\}$ 的差數正負一樣可能，故採用雙尾機率積分。

細觀(Ⅱ·7)式可化爲如下之公式：

$$\{\sqrt{\sum\chi^2(\bar{x}_i)}-\sqrt{\sum\chi^2(s_i^2)}\}/1=\sqrt{\sum\chi^2(\bar{x}_i)}-\sqrt{\sum\chi^2(s_i^2)}\quad\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot8)$$

(Ⅱ·8)式之計算比較簡單，故值得使用。

以上吾人曾用 $\sum\chi^2(\bar{x}_i)$ 或 $\sum\chi^2(s_i^2)$，藉以表出不穩定性。用於顯著性測驗，未始不可。但如果能求出一種能表出穩定性程度的介值（Statistic），當更方便。此時吾人必定想到利用 χ^2 的倒數「$1/\chi^2$」以表出穩定性(以後簡稱穩性)，一如利用變方 σ^2 的倒數 $1/\sigma^2$ 表出正確度者然。設有兩個不同的卡方，一爲 χ_i^2，他爲 χ_j^2，由有同一分散的變值 x_i 及 x_j 算出，其自由度分別爲 n_i 及 n_j，若 χ_i^2 及 χ_j^2 均爲表出不穩性者，而 $\chi_i^2<\chi_j^2$，則 χ_i^2 及 χ_j^2 的穩性分別爲「$1/\chi_i^2$」及「$1/\chi_j^2$」，而 $1/\chi_i^2>1/\chi_j^2$，又如以 χ_i^2 爲基準，求出其相對穩性，則

$$\{(1/\chi_j^2)/(1/\chi_i^2)\}\times100=(\chi_i^2/\chi_j^2)\times100=\text{相對穩性}\quad\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot9)$$

查 χ_i^2 及 χ_j^2 的自由度分別爲 n_i 及 n_j，將其插入公式(Ⅱ·9)，則得：

$$\frac{n_j\cdot\chi_i^2}{\chi_j^2\cdot n_i}=\dot{F}\quad\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot10)$$

(Ⅱ·10)式中的 $\dot{F}$ 的取樣分布 (Sampling Distribution) 必爲 $\dot{F}$ 分布，其兩個自由度之中，一爲 χ_i^2 的 n_i，他爲 χ_j^2 的 n_j，該 $\dot{F}$ 等於通常 Snedecor's F 的倒數 F^{-1}:

$$\dot{F}=\frac{1}{F}=F^{-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 11)$$

$\dot{F}$ 分布的顯著水準點數值的自由度配列和 F 的恰恰相反。換言之，如 $\dot{F}$ 的自由度配列爲 n_i, n_j，則 F 的自由度爲 n_j, n_i。

吾人在此所討論的 $\chi^2(\bar{x}_i)$'s 及 $\chi^2(s_i^2)$'s, $n_i=n_j=n=9$。因而

$$\chi_j^2 \text{ 的相對穩性}=\frac{n_j}{\chi_j^2}\frac{\chi_i^2}{n_i}\times 100=\frac{\chi_i^2}{\chi_j^2}\times 100=100\,\dot{F}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 12)$$

因爲 $\dot{F}$ 和 F 有(Ⅱ·11)式的關係，所以 $\dot{F}=0$，則 $F\doteq\infty$, $\dot{F}=\infty$ 時 $F=0$，兩者函數的關係如次：

今以 $\phi(\dot{F})$ 代表 $\dot{F}$ 的頻度函數 (Frequency Function)，$\psi(F)$ 代表 F 的頻度函數，則：

$$\phi(\dot{F})d\dot{F}=\psi(F)dF\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 13)$$

蓋：

$$\because d\dot{F}=(-1)dF\cdot F^{-2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \phi(\dot{F})d\dot{F}&=(-1)\phi(\dot{F})F^{-2}dF\\&=(-1)B^{-1}F^{-(n/2-1)}(1+\dot{F})^{-n}F^{-2}dF\quad[\because n_i=n_j=n]\\&=(-1)B^{-1}F^{-(n/2-1)}\left(\frac{1+F}{F}\right)^{-n}F^{-2}dF\\&=(-1)B^{-1}F^{(n/2+1-2)}(1+F)^{-n}dF\\&=(-1)BF^{(n/2-1)}(1+F)^{-n}dF\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 14)\end{aligned}$$

上述係變數轉換的應用當然亦可用 Jacobian Determinant 法以達目的。今如欲求出 $P_r[\dot{F}\geqslant\dot{F}_0]$ 的機率積分，可用下式求出之：

$$\begin{aligned}\int_{\dot{F}_0}^{\infty}\phi(\dot{F})d\dot{F}&=(-1)\int_{1/F}^{0}B^{-1}F^{(n/2-1)}(1+F)^{-n}dF\\&=\int_0^{1/F}B^{-1}F^{(n/2-1)}(1+F)^{-n}dF\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 15)\end{aligned}$$

式中 B^{-1} 係 $B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ 的倒數。

上述不過說明 $\dot{F}$ 的顯著水準點，可從 F 分布求出而已。F 分布的顯著水準點除幾個特殊者外，尙無可用之表，所以 $\dot{F}$ 顯著水準點的數值，除了直接求出外，並不能利用 F 顯著水準點表以求之，現再從另一角度討論此一問題。

F 的自然對數的半值以 Z 代表之，則

$$Z=\frac{1}{2}\log_e F\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 16)$$

Z 的分布已經被 Fisher 大師闡明；在虛位擬說 $H_0: n_j\chi_i^2=n_i\chi_j^2$ 之下，Z 的頻度函度 $\phi(Z)$ 如下：

$$\phi(z)=2B^{-1}n_j^{n_i/2}n_i^{n_i/2}[n_je^{2z}+n_i]^{-(n_i+n_j)/2},\ -\infty<z<\infty$$

式中 n_j 係較大卡方的自由度，n_i 係較小者的自由度。如 $n_i=n_j=n$，則

$$\begin{aligned}\phi(z)&=2B^{-1}n^n[ne^{2z}+n]^{-n}\\&=2B^{-1}[e^{2z}+1]^{-n}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 17)\end{aligned}$$

如（Ⅱ·17）式中之 n 够大，則

（Ⅱ·18）式所代表的Z分布的平均及其變方可視爲：

$$\left.\begin{aligned}\text{平均 }(Z)&=0\\ \text{變方 }(Z)&=\frac{1}{n}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 18)$$

而極近常態性。因而標準常態值爲：

$$\text{標準常態值 }(Z)=\sqrt{n}\cdot Z=Z\cdot n^{1/2}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{Ⅱ}\cdot 19)$$

試以表Ⅱ·1 中之 BG 場合的卡方合計 $\sum\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $\sum\chi^2(s_i^2)$ 之間差異顯著性測驗爲例：

$$\sum\chi^2(\bar{x}_i)=228.9397. \qquad d.f.=153$$

$$\sum\chi^2(s_i^2)=152.3873. \qquad d.f.=153$$

$$Z=\frac{1}{2}\log_e\ (228.9397/152.3873)=.203493$$

$$\sqrt{n}=12.369317$$

$$Z\sqrt{n}=.203493\times 12.369317=2.5171$$

而 $P_r[\tau\geqslant|2.517|]=.0118$ 故顯著

$\sum\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $\sum\chi^2(s_i^2)$ 之間差異的存在，已從統計上證實之。此事和表Ⅱ·7 中所示者一致。

以上所討論的是兩個153自由度的合計 $\sum\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\sum\chi^2(s_i^2)$ 的比較測驗，因爲自由度够大，化爲Z值接近常態性，可用標準常態值方法處理之。

但是如果自由度不够大，則上述方法不能說是安全的。譬如說：表Ⅱ·1 中 SB 場合，$n'_i=110$, 其 $\chi_i^2(\bar{x}_i)=6.597$, 其穩性爲 $\frac{1}{6.597}\times 100=15.16$, $n'_j=150$, 其 $\chi_j^2(\bar{x}_j)=10.4445$ 則其穩性 $=\frac{1}{10.4445}\times 100=8.570$，因爲 $n'_i=110$ 的 $\chi_i^2(\bar{x}_i)$ 爲其中最小者，將其作爲基準（Basis）和 $n'_j=150$ 的 $\chi_j^2(\bar{x}_j)$ 對照，求出相對穩性＝RS（Relative Steadiness 的縮寫）$=[(1/\chi_j^2)/(1/\chi_i^2)]\times 100=6.597/10.4445)\times 100=63.16$ 換言之 $n'_j=150$ 機樣平均 $\bar{x}_j$ 的穩性約爲 $n'_i=110$ 時的63%。

其次問題是 $n'_j=150$ 時 $\bar{x}_j$ 時穩性較 $n'_i=110$ 時的穩性少 37%該種差數是否顯著？需要測驗。詳言之，該37%的差異由於取樣變異而起的？還是眞的差異？需要測驗，欲達此一目的，吾人只須測驗 $\chi_j^2(\bar{x}_j)=10.4445$ 和 $\chi_i^2(\bar{x}_i)=6.597$ 兩者間差異性即可。如此則可應用 F 顯著性測驗法，即可達目的。因爲 F表有現成的可資利用。

實算：

$${}^9_9F_0=\frac{10.4445}{6.5970}=1.583$$

查 F 表，則見 ${}^9_9F_{.05}=3.18$，1.583 小於 3.18，而有相當距離，所以吾人可斷言：$n'_j=150$ 的 $\chi_j^2(\bar{x}_j)$ 和 $n'_i=110$ 的 $\chi_i^2(\bar{x}_i)$ 雖在數字上有差異，但該種差數在統計上，未能證實其存在。換言之，其存在可能很少。

綜合以上所述，總結起來：

(1) 如 χ_j^2 和 χ_i^2 有同一自由度，而 $\chi_j^2>\chi_i^2$，則其穩性 $1/\chi_j^2<1/\chi_i^2$，其以 χ_i 爲基準的相對穩性可以 $(\chi_i^2/\chi_j^2)\times 100$ 表出之。現在所處理的 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$，其自由度均相同，而等於 9，上述穩性及相對穩性公式均可應用。

(2) $\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $\chi^2(s_i^2)$ 的自由度旣均相同，如在數值上 $\chi_j^2>\chi_i^2$ 其差異（$\chi_j^2\sim\chi_i^2$）顯著性測驗

法：

i） 自由度够之時：下列兩法均可應用，選其方便者實施之：

(a) $[\Sigma\chi_j^2-\Sigma\chi_i^2]>1.96$（雙尾機率），則顯著。

(b) $Z=\frac{1}{2}\log_e(\chi_j^2/\chi_i^2)$

Z/標準偏差(Z)＝標準常態值$=Z\sqrt{n}>1.96$，則顯著。

ii） 自由度不够大時：如 χ_j^2 和 χ_i^2 自由度雖相同，而不够大時 [例如在上所討論的場合，$n_j=n_i=n=9$]：算出 ${}^{n}_{n}F_0={}^{9}_{9}F_0$ 值，查 Snedecor's F 表，以資測驗其顯著性。

第一回測定資料 SB 及 BG 的各種重複測定所得機樣的相對穩性（以 RS 代表之）以及各 n'_i（或 n'_j）的機樣穩性間差異數值均經算出，製成表 II·8(SB)及表 II·9(BG)如下：

表II·8 第一回測定資料的機樣相對穩性及穩性間差異顯著表

	SB			
n'_i	RS($\bar{x}_i$)	F($\bar{x}_i$)	RS(s_i^2)	F(s_i^2)
20	38.90(13)	2.571	99.60(2)	1.004
30	80.53(4)	1.242	86.51(3)	1.156
40	28.57(17)	3.500*	70.13(6)	1.426
50	42.71(11)	2.341	46.89(11)	2.133
60	49.34(9)	2.027	35.43(14)	2.822
70	79.97(5)	1.250	100.00(1)	1.000
80	56.70(7)	1.764	55.48(8)	1.802
90	41.21(12)	2.427	39.48(13)	2.533
100	38.02(14)	2.630	80.68(4)	1.239
110	100.00(1)	1.000	28.02(16)	3.569*
120	96.30(2)	1.038	51.86(10)	1.928
125	56.35(8)	1.775	78.99(5)	1.266
130	86.21(4)	1.160	54.04(9)	1.850
135	34.83(15)	2.871	43.91(12)	2.277
140	45.29(10)	2.208	34.45(15)	2.903
145	33.50(16)	2.985	27.11(17)	3.689*
150	63.16(6)	1.583	64.25(7)	1.556

* 係指超過 ${}^{9}_{9}F_{.05}=3.18$ 而言

** 係指超過 ${}^{9}_{9}F_{.01}=5.35$ 而言

† 係指近於 ${}^{9}_{9}F_{.05}$ 者而言

表II·9 第一回測定資料的機樣相對穩性及穩性間差異顯著性表

	BG			
n'_i	RS($\bar{x}_i$)	F($\bar{x}_i$)	RS(s_i^2)	F(s_i^2)
20	32.95(11)	3.035†	100.00(1)	1.000
30	77.99(3)	1.282	69.66(5)	1.436
40	27.56(14)	3.628*	77.61(2)	1.288

50	100.00(1)	1.000	38.80(13)	2.577
60	53.27(5)	1.877	45.97(10)	2.175
70	39.87(9)	2.508	64.18(7)	1.558
80	11.76(17)	8.503**	21.75(17)	4.598*
90	24.24(15)	4.125*	32.82(15)	3.047+
100	49.80(6)	2.008	39.37(12)	2.540
110	23.93(16)	4.179*	46.30(9)	2.160
120	32.21(13)	3.105+	71.57(4)	1.397
125	47.21(7)	2.118	57.36(8)	1.743
130	42.21(8)	2.369	24.83(16)	4.027*
135	32.72(12)	3.056+	68.69(6)	1.456
140	86.29(2)	1.159	75.15(3)	1.331
145	35.01(10)	2.856	34.79(14)	2.874
150	60.04(4)	1.666	39.42(11)	2.537

* 係指超過 ${}^{9}_{9}F_{.05}=3.18$ 而言

** 係指超過 ${}^{9}_{9}F_{.01}=5.35$ 而言

† 係指近於 ${}^{9}_{9}F_{.05}$ 者而言

相對穩性（RS）顧名思義，所謂穩性是相對的，而非絕對的。在 n_i' 次重複測定所得諸機樣中，其平均（$\bar{x}_i$）及均方（s_i^2）變動較少，反映於卡方，因而卡方亦較小。秉此一概念，以卡方倒數做爲穩性，有類似 Fisher 大師用變方（σ^2）倒數表出變值的正確度之處，似無不當。除去乘數100不論，相對穩性的倒數即爲 Snedecor's F 值，可充相對穩性顯著性的測驗，亦稱便利，可謂一舉兩得。

今反觀前述表 II·1 SB 場合 $n_i'=40$, $\chi^2(\bar{x}_i)=23.096^{**}$ 係顯著者，於表 II·8 $n_i'=40$ RS $(\bar{x}_i)=28.57$，$F=3.500^*$ 亦係顯著。其餘表II·8中尚有 $n_i'=735$, $\chi^2(\bar{x}_i)=18.9431^*$ 及 $n_i'=145$，$\chi^2(\bar{x}_i)=19.6915$，和表II·1中 $n_i'=135$，$F=2.871$；$n_i'=145$, $F=2.985$。雖相近於3.18($F_{.05}$)的數值，但未達顯著水準。又看SB場合的 $n_i'=110$, $\chi^2(s_i^2)=16.6441^*$，$n_i'=145$，$\chi^2(s_i^2)=17.1998^*$，和表II·8中 $n_i'=110$，$F=3.569^*$，$n_i'=145$，$F=3.689^*$。$\chi^2(s_i^2)$ 的顯著性和表 II·8 $F(s_i^2)$ 的 $n_i'=110$及145時的顯著性完全一致。

又對看表II·1和表II·9場合，則見 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 和 $F(\bar{x}_i)$: $n_i'=40$, 80, 90, 110等機樣兩者顯著性完全一致（雖有程度上的相異），再對看同場合的表II·1 和表II·9 則見 $\chi^2(\chi_i^2)$ 及 $F(s_i^2)$，前者於 $n_i'=80$，$\chi^2(s_i^2)=18.5592^*$，$n_i'=130$，$\chi^2(s_i^2)=16.2604^+$；後者於$n_i'=80$，$F(s_i^2)=4.598^*$，$n_i'=130$ $F(s_i^2)=4.027^*$，兩者關於顯著性不完全一致，經上述分析結果，吾人可以下結論曰：無論 SB 或 BG, RR 機樣平均（$\bar{x}_i$）及均方（s_i^2）的 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 的顯著性雖和 $F(\bar{x}_i)$ 及 $F(s_i^2)$ 的顯著性並行不悖，但未必完全一致。所以 $\chi^2(\bar{x}_i)$ 及 $\chi^2(s_i^2)$ 和 $F(\bar{x}_i)$ 及 $F(s_i^2)$ 各有其長處，不能偏廢。但任何一方不能單獨賦予吾人以整個詢識（Information）耳。

參 考 文 獻

(1) 汪厥明，研究報告第四報，(民國五十二年)
(Chueh-ming Wang, (1963).—Research Report No. 4)

(2) FISHER, R. A. (1950).—Statistical methods for research workers. 11 th Edi. New York: Hafner Pub. Co. pp. 226-227.

(3) JAMES, G. S. (1951).—The comparison of several groups of observations when the ratios of population variances are unknown. Biom., Vol. 38. pp. 324-329.

(4) KENDALL, M. G. (1955).—Rank correlation methods, 2nd Edn., London: Charles Griffin. pp. 49-66.

STUDY ON THE IMPROVEMENT OF RADIOACTIVITY RATE MEASURING TECHNIQUES

(Research Report No. 6)

CHUEH-MING WANG

College of Agriculture, National Taiwan University

I. In the current research report, the detailed approach procedure will be described about the adequacy of RR (Radioactivity Rate) counting per 2-second replicated 150 times, as a supplement to the last report, *i. e.*, the fifth report, in which it was mentioned rather briefly.

II. The random samples resulting from RR counts per 2-second replicated 150 times have proven statistically to be less unsteady as indicated by the relatively small values of the $\chi^2(\bar{x}_i)$ and $\chi^2(s_i^2)$.

III. For much more apprehension and convenience, the writer has given a definition of the steadiness of random samples of RR counting experiments as follows:

Suppose we have k random samples of RR of size n_i' from the k times replicated RR counting experiments, n_i' numerically ranging from 20 to 150. From these random samples of size n_i', the $\chi^2(\bar{x}_i)$'s due to discrepancies among their means ($\bar{x}_i$'s) and the $\chi^2(s_i^2)$ due to discrepancies among their mean squares (s_i^2's) arise and of course, the larger the values of $\chi^2(\bar{x}_i)$ and $\chi^2(s_i^2)$ are, the smaller the steadiness becomes, or in short, they are inversely proportional. Hence, we can express the steadiness of samples by the reciprocal of χ_i^2 calculated from them such as $1/\chi_i^2$ and $1/\chi_j^2$ and

$$1/\chi_i^2 > 1/\chi_j^2 ,$$

if $\chi_i^2 < \chi_j^2$. The RS (Relative Steadiness) then, can be expressed as the percentage of χ_i^2, χ_j^2 being 100%. In the present report, *d.f.*, the degrees of freedom (n_i) of χ_i^2's are all the same.

IV. As shown by the statistical theory, RS can be expressed in the form of Snedecor's F:

$$F = \frac{n_i \chi_j^2}{n_j \chi_i^2} = \frac{\chi_j^2}{\chi_i^2}$$

if $n_i = n_j = n$ (the degrees of freedom for each χ_i^2), as it is the case in the present report. On the other side, the RS of a χ_i^2 is equal to $\dot{F}$:

$$\dot{F} = \frac{\chi_i^2}{\chi_j^2} = 1/(\chi_j^2/\chi_i^2) = 1/F$$

the $\dot{F}$ has a frequency function, $\phi(\dot{F})$ which is mathematico-statistically connected to that of F, ψ (F) as follows:

$$\phi(\dot{F})d\dot{F} = (-1)B^{-1}F^{(n/2-1)}(1+F)^{-n}dF$$

where n is the *d.f.* of $\dot{F}$ and F. Accordingly, $\dot{F}$'s probability integral in excess of a particular $\dot{F}$. is:

$$\int_{\dot{F}.}^{\infty}\phi(\dot{F})d\dot{F} = \int_0^{1/F_0}\psi(F)dF$$

From the relationship of $\dot{F}$ and F, it seems to be possible, that the $\dot{F}$-probability-integral may be expressed in terms of F. Unfortunately, any F-table like this is not available, and for the practical purposes, the above connection between $\dot{F}$ and F can not be utilized. However, we can use Snedecor's F-tables, if we are merely willing to test significance for difference between χ_i^2 and χ_j^2 regardless of their relative positions in expression. By referring to Snedecor's F-tables, it is thus made possible, to test significance for RS easily. By several tests for significance including the one just now mentioned above, the random sample of RR of size $n_i' = 150$, has been verified adequate.

V. In such a case where the *d.f.*'s of the statistics may be large enough, each *d.f.*, equal to say, $\sum n_i = \sum n_j = kn$ such as those of χ^2-totals, the $(\sum\chi_i^2)$'s. but the corresponding values of F may be unavailing in Snedecor's F-tables, we can utilize the approach of $\sqrt{2\sum\chi_i^2}$ to normal distribution when its *d. f.* being sufficiently large ($d.f. = 153$, say). For example, to test the difference between $\sum\chi_i^2$ and $\sum\chi_j^2$, they can be normalized as

$$\{\sqrt{2\sum\chi_i^2} - \sqrt{2\sum\chi_j^2}\}/\sqrt{2} = \sqrt{\sum\chi_i^2} - \sqrt{\sum\chi_j^2}$$

with its mean$=0$ and variance$=1$.

Since in the case of BG, for instance, $\sum\chi^2(\bar{x}_i) = 228.9397$, $\sum\chi^2(s_i^2) = 152.3873$ and $\sqrt{\sum\chi^2(\bar{x}_i)} - \sqrt{\sum\chi^2(s_i^2)} = 15.131 - 12.345 = 2.786$, the probability that a standard normal variate is in excess of the absolute value, $|2.786|$* is .0053 and therefore, the difference between two total Chi-Squares is statistically very significant.

VI. Morever. for significance test of difference between two Chi-squares each with large *d.f.* we can also use the Fisher's z calculated from Snedecor's F, i.e.,

$$z = \frac{1}{2}\log_e F$$

In this case, $\phi(z)$, the frequency function of z-distribution is

$$\phi(z) = 2B^{-1}\ [1+e^{2z}]^{-kn}$$

where B^{-1} is the reciprocal of B-Function, kn the *d.f.* for each χ^2-total $(\sum\chi_i^2)$ and e the base of Napierian Logarithm. It seems to the writer that the problem how to get a good choice between these formulae is, somewhat, depending on the personal preference and by his experience, either of the above tests will give the similar result.

* If one sided test for significance were used, the probability that a standardized normal variate exceeded 2.786 would be .0027 which is very close to .0029, i.e. a half probability integral value (.0029) corresponding to the level point of 2.517.

Taking the same data as quoted in ¶ V for example:

$$z=\frac{1}{2}\log_e\ (228.9397/152.3873)=.203493$$

$\sqrt{kn}=\sqrt{153}=12.369317$ and τ, the standardized normal variate$=z\sqrt{kn}=2.517$, the probability that a standardized normal variate is in excess of $|2.517|$, the absolute value, is approximately .01, which gives the similar result to ¶ V.

VII. By Kendall's methods, the rank correlations among the five rankings of n_i', $\chi^2(\bar{x}_i)$ and $\chi^2(s_i^2)$ of BGRR and SBRR have been undergone through trials, but no evidence found supports their real existence.