科學教育學刊
2006, 第十四卷第五期, 517-543

Chinese Journal of Science Education
2006, 14(5), 517-543

探討高中數學教學融入建模活動的支撐策略及促進參與教師反思的潛在機制

楊凱琳 [1]　**林福來** [2]

[1] 國立彰化師範大學 數學系

[2] 國立台灣師範大學 數學系

（投稿日期：民國 93 年 12 月 15 日，修訂日期：94 年 8 月 12 日，接受日期：94 年 10 月 6 日）

摘要：在台灣不利於數學建模教學的環境中，透過參與協同行動研究的過程，本文分析可支撐高中數學教師在既有的上課時間與教材內容中融入數學建模教學活動的策略，由參與教師的改變評估支撐策略可能的成效，並進一步探討可促進教師反思的潛在機制。一年半的研究過程中，由一位研究者先以參與的研究者之角色和參與教師共同討論，設法解決在協同行動研究過程中所面臨的障礙。之後，再由兩位研究者分別以參與和觀察研究者的角度來詮釋此行動研究的歷程。研究發現參與教師所顯現的成長，包含對教材設計的考量從課本教材的相關性、問題情境的多元性與子活動順序的流暢性已逐漸擴充至關心學生既有經驗的聯結性與教材是否引動學生發展多樣的建模策略；教學方法的使用從主導者、旁觀提示者、經營管理者逐漸展現有預謀的參與討論者；對學生建模思維的瞭解，也從數學解題的觀點轉化成數學建模的思維模式。檢視參與教師在各學習脈絡中的成長後，也驗證了提供教材資源有助於建立參與教師實作的信心，利用一次觀摩其他教師的教學可突破其反思的侷限，而開放討論數學建模思維的分析模式也激發參與教師設計新的教學活動。此外，透過「解惑」的觀點來分析參與教師與研究者的互動歷程後，「雙重體驗為憑的交流」、「同理心的投射」和「不確定感的激發」被認定為促進教師反思成長可能的潛在機制。本文在實作上可提供師資培育者或教師進行專業發展時一些新的支撐策略，在理論上則基於「解惑」觀點來探討可促進參與教師反思的潛在機制，此探討可以讓教育學者更有效地掌握教師專業發展的歷程，也希望未來的研究可以從本文所探討的潛在機制來擬定適合不同特質教師的支撐策略。

關鍵詞：反思機制、教師專業成長、數學建模

緒　　論

以模式和建模的觀點來促進數學教學與學習的發展，是迎向新科技時代培養學生所需之數學素養的一種必要手段（English, 1999; Lesh & Doerr, 2003）。曾任 International Congress on Mathematical Instrution 執行祕書的

Niss（2002）明確指出，建模也是八種主要的數學素養（competency）之一，這八種數學素養也被 Organization for Economic Co-operation and Development（OECD）所推動的 Programme for International Student Assessment 當成發展試題的架構（OECD, 2003）。數學建模（mathematical modeling）不同於傳統的解題只將焦點放在問題的數學表徵化和數學解答，數學建模將焦點從發現解答改變為轉換與詮釋情境資訊、辨別潛在的問題、建立模式、再詮釋數學解答的前提、假設與可能的偏誤。有關數學應用與建模的重要議題已引起數學教育界廣泛的回響與探討（Houston, Blum, Huntley & Neill, 1997; Blum, 2002），而且國際上也有不少成功的數學建模教學方案，例如：俄國以建模課程作為資訊科學學習的延伸，並採用教師教導、小組合作與個別工作循序漸進的教學方式來增強高中生的跨領域的技能（Henner & Stestakov, 1997）。Ikeda（1997）建議在建模活動中教師應依照個人的建模教學能力來決定教師所扮演的角色，其研究結果發現能夠引導學生注意與討論同儕間不同的數學思維是一個重要的教學策略。Kaiser 和 Willander（2005）評估一個提供教師建模教材的創新教學方案後，發現其有助於改善學生低層次的數學素養。Lege（2005）比較提供情境題的範例模式和只提供情境題的兩種教學後，也發現兩種教學都有助於提昇學生建模能力。

但是，各種教學方案實施上仍需考量情境脈絡與社會文化的特殊性，因此本研究想要探討如何將建模的觀點和理念落實在我國高中數學教育環境的現況中。一般而言，我們高中數學教育環境對引進建模教學存在諸多不利的障礙。以下先就教師和學生的既有經驗、升學考試與現有的數學教材等三方面，來說明台灣教育環境不利於模式與建模教學之處。大部分的高中數學教學模式是依照下列步驟進行：介紹組織完整的單元概念、示範例題和演算技巧、讓學生練習、學生儘可能提供自己正確的想法、教師提供便捷的解題技巧（Lin & Tsao, 1999）；在這樣的教學環境下，學生習慣於教師必須提供正確的解答過程，而且師生除了不熟悉數學建模的教學活動，也可能抱持排斥數學建模的心態。在一次非正式的調查中，有些中學數學教師認為只有在已經獲得相關數學概念和演算後，學生才可以使用數學解決問題。也有些教師不認同在未習得新的數學知識之前，學生能夠使用自己的策略來解決涵蓋此新知識的問題。

為什麼高中數學教學長久以來大都維持上述的教學模式？考試領導教學的傳統則是一個重要因素。當教師設計教材與安排教學時，以及當學生期望學習什麼以及如何學習時，都以最後在大學聯考獲得高分為第一考量；如此考量是由於這個成績不僅決定學生的升學成果也影響教師在學校中的地位，所以無論是教師或學生都在聯考所產生的各種壓力下進行數學的教學與學習。因此，許多得高分的學習方式經常在數學教室裡發生，例如：強記公式、精熟演算、標準題型的訓練等等。在升學導向之下，確實很難幫助學生去欣賞數學並認同學習數學的潛在價值，而且學習的焦點偏重於數學的演算法則（例如：等式中移項變號）並非數學的思維方法（例如：等量公理的思維），也容易產生數學知識和現實世界脫節的看法。

雖然數學課程的改革已在台灣進行多時，但高中數學課本仍有不少單元透過計算和法則的方式來呈現數學概念的意義，例如：複數、向量、三角函數、機率與統計等等。教材設計隱藏的基本假設是：學生透過計算和法則的模仿練習來解決問題後，漸漸

地就能瞭解這些過程背後的數學意義。並非讓學生在富有多重意義的脈絡下，經由情境資訊的解釋、轉換，發展出不同的初始模式並探討如何使用這些模式來解決問題。在多數的中學數學教室裡真正執行的課程可說是符合參考書模式，強調解題的規則，精選例題和重複的練習（Lin & Tsao, 1999）。另外，在訪談教過資優班的教師以及參考高中數學學習成就優異生輔導計畫的資料後，不難發現其教學內容主要以純數學問題為主，透過加深加廣的數學內容和多元解法的探討來培訓數學優秀人才。雖然可以提昇學生的數學思維和解題能力，但數學世界和現實世界的連結能力仍有待開發，而此能力的培養也正是建模教學的重心。

雖然在教學、考試與教材等因素中都面臨了數學建模教學實作的困境，但有鑒於數學建模對於培養學生所需數學知能的重要性，數學建模教與學的探究應該是一個值得且有待開發的領域。在參與教師同意在其教學中融入數學建模教學活動下，本文著重於分析參與教師發展數學建模教學知能的特性，因而擬定的研究目的如下，有關於學生的建模思維與學習特性之分析請參閱 Lin 和 Yang（2005）。

(一)在不利於數學建模教學的環境中，發展必要的支撐策略來協助參與教師進行建模教學活動並評析策略的成效。

(二)在參與教師實作建模活動教學的過程中，分析其與研究者的互動歷程，並從中探討促進參與教師反思的潛在機制。

文獻探討

本文基於模式與建模的觀點和理念，透過數學建模活動增加參與教師的經驗來擾動數學教室的現況。希望在此擾動下，逐漸發展參與教師的數學建模教學知能。所以，在文獻探討上主要簡介關於數學建模的概念與相關議題，與一種促進教師改變與專業發展的研究觀點。

一、模式與建模

模式是一個有機的系統，這個系統包含被操作的元素、操作規則、元素或規則間的相關性，透過這個系統能有效地描述、解釋或預測某些物件的行為。物件即是被表徵的對象，物件的來源又可大致分為數學內和數學外兩種範疇，這個範疇的界限可先以表徵方式再輔以表徵內容來區分。如果表徵方式涉及數學符號則可稱之為數學內，但如果不是數學符號則必須再考量表徵的內容，是否涉及數學概念；例如：「一個連續遞增的函數」，雖然它的表徵方式是語言但卻與函數概念有關，所以仍歸屬於數學內的範疇。將模式表徵的對象先區分為數學內和數學外的用意，不在於限制數學建模課程的觸角，而是是用來強化數學建模課程的特色：藉由既有的媒介物（內在和外在表徵）來探討現象（數學內和數學外）的規律。建模是一種透過瞭解、分析和探索現象來建立模式的過程，建模除了要找出問題的答案，更重要的是過程中體驗概念化的瞭解、嘗試表徵化的資訊處理、詮釋模式和現象間的意義，累積這些經驗漸漸形成建模過程所需的能力。依照模式發展的程序來看，完善的建模過程必須包含模式啟動（model-eliciting）、模式探究（model-exploring）和模式調整（model-adapting）的活動（Lesh, Cramer, Doerr, Post, & Zawojewski, 2003）。模式啟動主要在引起學生各式各樣的想法，模式探究偏重數學結構的導入，模式調整則聚焦於統整和應用。建模過程所產生的模式可區分成不同的層次：

情境模式（situational model）、特定模式（model of）、一般化模式（model for）和形式化模式（formal model），無論哪一種層次的模式都可形成下一次建模的資源（Gravemeijer, 1994）。而建模是在某種情境下，設定某些目的與產生、瞭解、整合或修改模式的過程。模式的層次與建模的程序可互相交織成學習與教學脈絡的大架構，而形成理想的教學序列：模式啟動、模式探究和模式調整等系列化的建模活動。換句話說，數學建模導向的數學課程應包含此三個序列的教學活動。

二、以模式和建模觀點來探討數學解題、學習和教學的研究

Lesh 和 Lehrer（2003）在描述基於模式和建模觀點的學生與教師發展一文中指出，許多研究把模式和建模的觀點視為一個重要的概念性架構，此想法主要奠基於 Piaget、Vygotsky 以及美國的實踐主義。Piaget 的理論讓此觀點認同經驗的數學性解釋具有完形概念系統的特性，Vygotsky 學派將思維視為傳遞調節的活動促使此觀點突顯概念性工具的角色。這工具可能來自於個人的努力，也可能發生在群體的活動，而這種在個人和群體間的二重關係也正是美國實踐主義所秉持的傳統。Lesh 和 Lehrer 在教學設計上，則將 Vygotsky 單維度的 ZPD 擴充至多維度；也就是說，學生在任何概念上的發展是具有各式各樣的可能路徑。教學上也不是單方向的接受既定的思維方式，而是讓學生能夠表達、檢驗和修正自己的思維方式。當以模式和建模的觀點來探討學生、教師、課程教材和教學計畫的互動發展時，主要產生三種相關但又不同的研究面向：非傳統的解題、在學校學習的建模活動之設計原則、教師發展知識與能力的特性。在非傳統解題的研究中，想要找出新科技時代所需的數學知能，以及找出在傳統教材和考試中被列為低成就但卻具有特別能力的學生。在設計建模活動時，想要發展深層瞭解和高階思考的學習環境，以及探討製造一般學生也可獲得特別成就的方法。在教師方面，融入以教室為本位的專業發展活動，讓教師的教學經驗能夠成為個人有發展性的學習經驗。無論是非傳統解題、建模活動的設計原則或是教師發展知識與能力的特性，都涉及了學生的學習特性與教師的教學反思。

三、支撐教師改變的策略與教學反思

提及師資培育或教師專業發展，雖然培養教學知能與促進成長的策略是多元的，但共同的目標大都包含：更瞭解學生的學習、能發展順應學生學習特性的有效教學以及持續追求成長所需的知能與態度（Lin & Cooney, 2001）。已有研究（Fullan & Miles, 1992; Lin & Cooney, 2001）指出：除了外來的壓力外，吸引教師願意投入專業發展的主因是，他們相信此發展能夠真正落實在日常的教學或提昇其在教師社群中的地位。本研究的參與教師已經具有想要嘗試數學建模教學的意願，但如何有效且持續地支撐參與教師的專業發展？Lin（2003）曾指出支撐教師改變的策略可區分成透過實作研討（e.g. Lin, 2002; Potari & Jaworski, 2002）、內容導向（e.g. Heaton & Mickelson, 2002; van Zoest & Bohl, 2002）或是資訊科技（e.g. Ponte, Oliveira & Varandas, 2002; Laborde, 2001）等方式。此外，如果從研究者的觀點切入，則支撐教師成長的策略也可能就是研究想法、研究過程或是研究發現（Lin, 2003）。但本研究並非先設定支撐策略來觀察或檢驗教師的成長，而是從發展教師建模教學知能的協同行動研究中，考量參與教師所面臨的困境後再輔以提供教材資

源、觀摩教學與分析學生思維等支撐策略。

另一方面，為了設定促進專業發展的子目標與實際行動的策略，我們必須先思考教師改變的模式為何？究竟是信念先改變還是教室中的教學先改變？如果採取信念改變先於實務的改變，那麼師資培育者必須考量哪些經驗可以充當促使信念改變的證據；如果採取信念改變之前必須先察覺學生學習表現的改變，那麼問題就變成哪些證據可以解釋學生表現的改變。無論採取哪一種立場，「疑惑（doubt）」（Cooney, 2001）這個概念都十足重要。如果教師能對於既有的信念或行動產生疑惑，那原以為理所當然的現象就會受到動搖，如此有助於促進教師的反思。可是只懷有疑惑還不足以改變教學現況，仍需將此疑惑進行高層次的思考，如同理智性層次的好奇心（Dewey, 1933）。而且 Dewey 反省思維的五種階段：在他人建議中感覺困惑（suggestion）、有意圖地詮釋此現象（intellectualization）、澄清問題與目標（the guiding idea）、發展方案（reasoning）、需要進一步的觀察和實驗來檢驗（testing），也反映著反省思維並非天馬行空的亂想，而是一種**明確產生困惑、深入察覺、面對疑難與解決問題的過程與結果**。本研究擬以此「解惑」的理論觀點，從中探討教師的改變與促進教師反思的潛在機制。

研究方法

研究者考慮知與行的不一致，也就是說參與教師即使從文獻上瞭解什麼是建模活動，並不一定能針對正在教學的單元設計建模問題，所以剛開始就由研究者先提供相關的建模問題。而且因既有高中課程進度的限制，所以只以片面的模式啟動的問題穿插在不同的數學單元中；但是這些問題不僅是有情境的資訊，而且希望這些資訊是能啟動學生多樣的思考方式，以及藉由同儕間的激盪再進一步調整自己的想法。教學過程中以學生呈現、修改、評論自己的或他人的想法為主。另一方面，為了增加參與教師實作的自主性，以及期待參與教師的教學目標能因為和研究者的不一致而對教學產生疑惑感，所以教學前研究者並不主動和參與教師詳細討論建模問題的教學目標，參與教師是否進行模式探究或模式調整的活動則依時間的多寡與教師的融入程度來抉擇。

Burrill（1997）提出好的教學不是使得學習變得容易，而是要讓學生能夠主動投入學習。但是，如何讓學生能夠主動投入學習就有賴於對學生思維特徵的理解。探討學生的思維不僅有利於用來幫助學生的學習（e.g., Campbell, 1997; Hiebert & Wearne, 1993; Fennema, Carpenter, Franke, Levi, Jacobs, & Empson, 1996），也能促進教師對學生認知與教學的理解（Herman, 1998; Tirosh, Stavy, & Tsamir, 2001）。因此，本研究希望透過和參與教師共同分析學生的建模思維來幫助彼此都能深入理解學生的學習與認知情形，並藉此來改善數學建模的教材設計與教學介入。

另外，教師對於教學過程與結果的反思也是改進教學的必要條件之一（e.g., Brookfield, 1995; Dorward, 2002; Sparks-Langer & Colton, 1991; Schon, 1983）。從解題、教學和學習等三方面來思考可促進反思實作的策略後，猜想以提供佈題資源建立教師參與實作的信心，以觀摩其他教師的建模教學突破教師反思的侷限，再以擬定建模思維分析模式來激發教師設計新的教學活動。也就是說，讓促進教師反思成長的來源不僅是發生在教室的場域中（教學的部分），也發生在參與研究的場域中（教材與分析模式的部分），是一

種藉由外在的鷹架來支撐並連結參與教師實作與反思的歷程。

最後擬以「解惑」理論觀點，即疑惑的產生與排除即是反思實作的循環歷程，來分析透過哪些機制可讓參與教師對教學現狀或自己的信念產生疑惑，並朝向解決問題以排除疑惑的目標，進而在解惑的過程中促進教師的專業成長。同時，本研究主張在產生懷疑之前，還是先豐富參與教師的既有經驗，有了不同於以往的教學經驗才能真正引爆各種變化。因此，支撐教師在一般教學中融入建模教學活動的第一步則是提供教師數學建模的教材。

一年半的研究過程中，由一位研究者先以參與的研究者之角色和參與教師共同討論，設法解決在協同行動研究過程中所面臨的障礙，再由兩位研究者分別以參與和觀察研究者的角度來詮釋此行動研究的歷程。一年半來討論的頻率隨著活動進行的時間不同而改變，平均約二個星期一次。以下除了簡介參與教師背景、參與教師和研究者的角色與互動外，也從教材（佈題）、教學以及建模思維分析模式等三方面來描述研究的發展過程。而兩位研究者即分別透過參與及觀察這些發展過程，來詮釋參與教師成長的現象。一方面，除了從不同脈絡收集參與教師在行動或思想上的改變證據，也透過參與研究者和觀察研究者之間的討論，來增進此詮釋過程的可靠度；另一方面，除了從不同時期來描述參與教師的行動與思想以理解此研究脈絡的特殊性，也透過參與教師的認可或修定來增進此詮釋結果的有效性。從「解惑」的理論觀點來對照各脈絡的改變現象，並且基於認知衝突的學習理論來闡述參與教師與研究者的互動歷程，進而探討能促進教師反思的潛在機制。本文以標楷體呈現的部分即屬於參與教師的意見，學生的反應則以原案加上編號表示，師生的對話則另以斜體字呈現。

一、參與教師背景

本研究的參與教師小虎（暱名）具有 7 年的高中教學經驗以及從事 3 年的行政工作，於參與研究的前一年，因其個人志趣決定到前幾志願的高中任教，在數學教師甄選的過程中幾乎都以第一名的成績錄取，最後決定任教於前三志願的某高中，本研究即以其任教學校的高一學生作為建模教學的對象。在幾次的非正式對談中，發現小虎可以非常清楚地談論個人的教學序列，而且當前也正熱心地指導幾位準教師準備參加教師甄試。小虎的教學非常重視學生的成績、家長的認同與學校的規範，具有可以成為典型名師的潛力，也是屬於穩定中求新求變的類型；另一方面，其性格不僅是平易近人，也喜歡製造冷笑話來呈現個人的幽默感。

當我們邀請小虎共同參與數學建模教學的協同行動研究時，他表示：入學考試題型的新趨勢是生活化的應用問題，應該和數學建模的精神是相互呼應的，所以找時間融入建模活動和升學考試是互不衝突的。並試著以當年大學入學考題的分析，希望讓學生明白此一趨勢進而認同此活動的進行。選擇小虎最主要的原因有二，一是其本身有多次協助學生參加各種競賽的經驗，這種解決非例行性數學問題的經驗應該有助小虎進行建模活動的教學；二是其對「數學建模」這個名詞還是不甚熟悉，關於數學建模教與學的部分更有待初步的探索，這種情況正符合一般教師對數學建模的認識。

在教學的歷程當中，很少聽到有關於建模的用語或活動教材，現有的認知就以字義直接翻譯去想，我認為建模應該是一種建立模型的數學活動吧，也就是給你一個數

學問題之後，應如何去設計一種數學問題上可以使用的模型，也就是將一堆數學資料轉換成數學的語言，進一步解出這個數學問題的解。

小虎對於數學課本中所使用的真實情境提出個人的看法：有些情境就像點綴用的裝飾品，並不能真正引起學生的學習動機；有些也不像是真實會發生的，也不需要建模過程來解題。而且小虎基於過往的教學經驗談到：有些善長數學的學生反而不喜歡課本中的這些情境問題，認為這些情境只是透過不必要的敘述讓簡單的問題看起來更複雜。在研究初期，小虎表示其教學模式大致上也是符合 Lin 和 Tsao（1999）所描述的教學步驟，並認為建模教學的方式可能會使得數學概念結構更複雜難懂。

我一般在教學上可能比較重視觀念的解說以及計算技巧的部份說明，通常也是比較直接就給學生數學的定義或公式，然後教學生如何使用公式，因此在教學上會比較屬於制式化的型式，較為強調老師教學，學生聽課的型式。

二、參與教師和研究者的角色與互動

雖然平等合作的研究關係是理想中的行動研究模式，但剛開始也只能由研究者主導研究的進行，而小虎扮演配合研究的角色；在每次討論的過程中，研究者會試著設計定不同的目標再轉由小虎負責主導，希望當小虎覺得具有充足的經驗與信心後，可以表現出數學建模教學專家的自主性。基於行動科學研究的理論（如 Argyris, Putnam, & Smith, 1985; Schon, 1983），以小虎所面臨的問題作為互動的開端，試圖突顯其所面臨的疑惑。小虎除了實作數學建模教學以及和研究者討論實作的歷程，研究者也鼓勵小虎質疑與調整研究者所提供的活動材料。希望能夠從中發展小虎建模教學的知能。

本研究設計著重於在關鍵性起點（計畫）與局部性終點（反思）給予小虎支撐，透過教材的提供來協助小虎設計建模活動，再由反思建模教學實作來改善建模活動的設計，以及分析學生的反應來瞭解學生的建模思維。至於研究者所扮演的觀察角色可區分為兩種：參與觀察者和監控觀察者。前者與參與教師共同分析學生的資料、直接參與和觀察教學實作歷程，而後者則扮演建議如何排除研究過程困境與詮釋研究歷程成果的角色。在此雙重互動的架構下，除了和小虎共同面對教學改革的阻礙，也可以幫助小虎透過反思實作檢視自己行動中的理論和信念，作為重新發現問題和修正行動的基礎。如此，研究者和小虎則能有效地共同編織願景，在互相激盪與共同學習中達到預期的目標。

三、協同行動研究的發展過程

本文以佈題、教學與思維分析模式等三方面來描述本研究的發展過程，此發展過程並非事先設計而是在協同行動研究進行中不斷修正與調整的結果。

(一)與設計佈題相關的發展過程

設計數學建模問題的參考資料來源有 Mason, Burton 和 Stacey（1985），Garfunkel, Godbold, Pollack 和 Bellman 等人（1998），沈翔、趙小平和康合太（2001），各活動概述請見附錄一。剛開始探討“什麼樣的數學問題適合數學建模”時，考量小虎所面臨的課程進度壓力，以及其所任教學校之高一學生既有的學習經驗，認為實際教學中難以完全符合最理想化的數學建模活動序列：模式啟動的活動、模式探究的活動和模式調整的活動。因此不以完整的建模過程來設計問題，而以兩個子過程：由非數學世界到數學

世界的轉換（例如：物理世界的波形到三角函數的數學式子或圖形），以及數學世界內的轉換（例如：三角函數的數學式子與圖形之間的轉換），先讓學生體驗建模過程的兩種轉換。接著再以條件充足（尋寶、搬傢俱）和條件不明（消防局、調查法）等建模問題，進行具有「從日常生活問題引出數學模式（波動、消防局、調查法）」、「從數學模式來解釋情境意義（尋寶、消防局、調查法）」、「轉換情境結構與數學模式（搬傢俱、消防局、調查法）」等數學建模特徵的活動。

本文以教師在設計佈題發展過程中所扮演的角色，將設計佈題區分成接受、調整和發展三個時期。

1.接受期：由於小虎尚未熟悉建模教學活動的意涵而且國內也少有數學建模的教材，在設計佈題方面基本上都是先透過研究者提供教材以及活動的內容，再由小虎修正用詞以利於學生的瞭解後就進行教學。在此情形下小虎觀察模仿的時間較多。例如：在小虎實作「波動」活動後，對於多數學生認為此波形無法用簡單三角函數的組合來表示，所做的反思如表 1。但是，研究者提供此問題原有不同的目的，即設定在讓學生產生認知衝突後，建立一種數學可由少數元素來生成複雜結果的數學感。事後小虎知道此預設目標後，仍覺得這樣的方式不見得可以有效地建立學生此種數學感。其理由是：

> 因為既有的課程目標並不需要探討如此複雜的圖形，所以學生也很少有機會再接觸這樣的圖形，即使這次學到了大部分也無法再應用到其他的問題。

在這個時期，小虎在接受教材後即以個人的認知來進行教學，但並未同時接受研究者的想法。

2.調整期：在尋寶和搬傢俱的建模活動所累積的實務經驗下，研究者與小虎深入討論學生的各種反應下所呈現的理解，並使用問卷來了解學生的學習成效及對建模活動的想法。漸漸地，小虎能將這些心得與體驗應用於下一個活動中。例如：小虎從一次觀摩其他教師進行「消防隊設置」活動中，以及討論分析學生許多不同的想法後，建議將問題調整成在「電信局機房設置」，小虎的評析請見表 2：

上面這個例子的提問方式以及提問順序，主要由小虎的想法來主導，其分析如下：

> 本問題希望學生了解絕對值函數的基本應用，除了在問題的呈現上已不同於剛開始

表 1：接受期小虎在建模教學後對問題與學生反應的評析

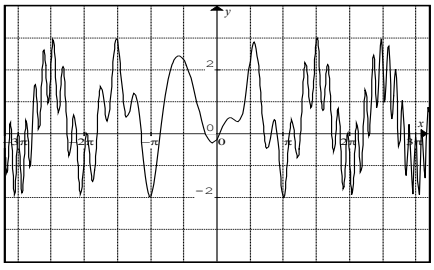
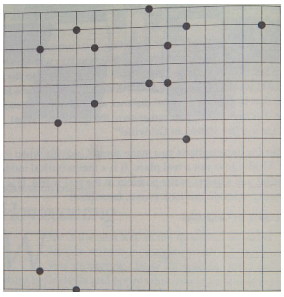
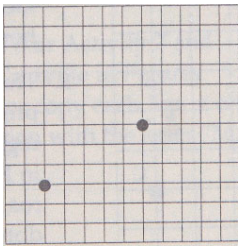
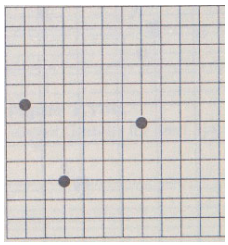
建模問題	小虎的評析
下列這個波形，你認為可以用三角函數的組合或變換來表示嗎？ 	這個問題是要讓同學欣賞一些由一個三角函數的次方變化組合而合（成）的函數所畫出的圖形，讓其了解光一種三角函數就有可能產生很複雜的圖形。但可能由於圖形並無法由觀察看出其任何內涵，所以學生感覺太難想像。

表 2：調整期小虎在教學前調整建模問題的想法

建模問題	小虎的想法
如圖表 1 中表新興都市的道路相關位置，黑點位置表示住宅區，黑線表示道路，若現在要設置一電信局機房然後鋪設電話線路，那麼應該設在哪？你可以用任何方法（可有圖表、方程式等等），並請說明你的理由。  圖表 1	原本是討論消防隊的設置位置問題，後來考量到其外在影響因素可能太多，所以將問題改成為討論設置電信局機房的問題。
a. 電信局機房的設置位置到各黑點應該滿足什麼條件比較好呢？可先研究下列圖表，請依據你的方法把電信局機房設置地點找出來？ 例如：圖表 2 和圖表 3  圖表 1  圖表 2	提供這些圖表的目的是希望引導學生由較為簡單的情形，也就是點數較少的情形開始考量起，而不要一次就看那麼多個點。
b. 若已經找出電信局機房設置位置，此時再任意加入一個黑點後，電信局機房位置是否需要再作調整？請說明你的理由。	希望學生藉由縮小問題範圍去思考，先將變因減少到較少的情形想。
c. 依據你的方法，電信局機房設置的位置是否只有一種？	希望學生思考其解的是否唯一存在，或者是否為佳的解。
d. 現在將你的設置位置右移一個單位，請依據你的條件來比較這兩個位置。	引導學生將一個變因改變，讓其觀察所發生的變化。
e. 依據你的定義，求出電信局機房到各個黑點的總距離和。	依據學生自己的定義，要求練習檢驗自己想法的可行性。
f. 若住宅區位置不以黑線交點處來表示，那麼你會遇到何種困難？	希望學生了解生活問題與數學問題在基本條件的假設上是有所差異的。

如同一般數學課本的方式；此外，問題的情境也自然融入生活經驗，有機會培養學生將「情境問題轉換成數學問題」的能力，而不只是純粹在算數學問題。

另外就問題安排的順序，小虎也因考量到學生思考的方式，而問題的安排則由易到難。所以先固定幾個變因，再逐步擴展到多個變數，並要求學生比較明確指出方法中所使用的數學，或進一步要求驗證此方法的實用性與正確性。

3.發展期：小虎已從實務經驗的心得與應用中，逐漸累積設計與實作教材的知能。一方面反思之前活動執行時所遇到的困難，來調整下一次的活動；一方面將自己的創意加入新的活動中，希望未來的活動更能啟動和支撐學生的學習與創意。例如：小虎提出在學生學過高中統計學的基本概念之後，如次數、百分比、算數平均數、加權平均數、去頭去尾法、統計圖形、最小平方法求迴歸線等等，應該讓學生有機會和一般的生活作連結，了解其應用不只是算算百分比或成績而已，而希望設計可深入探討統計量的意義與使用時機的建模活動，現階段小虎先形成問題討論的內容，至於情境的融入還有待進一步的設計。此外小虎參考 Garfunkel 等人（1998）所著的 Modeling our world 中第一冊的第一單元選舉決策後，也加入一些創新的議題，例如：不只是引導學生探討不同的選舉策略，也加入思考進行投票時的實務性問題，以及引導學生思考相同數據的不同詮釋及其合理性。在這個時期的小虎，雖然並未真正落實理想的建模活動序列，但仍顯現出專業自主的特性，不斷在協調理想的目標和現實的問題中發展合適的教材。

(二)教師在數學建模教學活動中提問方式的發展過程

在數學建模教學活動方面，主要以教師提問的特徵將其提問的問題分為一般性提問、特定脈絡的提問和啟發性提問。一般性提問是指未切入主題，只是表面層次的發問，例如：還沒有其他想法？特定脈絡的提問是指明確提出和解題過程或檢驗想法相關的問題，例如：為什麼要轉奇數次才可以轉回來？啟發性提問是指能促進創新思考或延伸思考的問題，例如：有沒有可能改變什麼條件，結果可以轉回來？在剛開始的活動中，小虎大部分以一般性提問，漸漸累積多次的經驗和反思調整後，已融入更多啟發性提問。

1.一般提問為主：小虎反思初期無經驗的情形下所進行的建模教學，認為由於學生沒有進行過此類的活動，而且自身也無相關的實務經驗，所以就偏向是照著自己預想的劇本演出。只針對教材上的問題與學生討論，有時介入太多（和預設教材相關時）有時毫無介入（和預設教材無關時）。小虎指出這可能讓學生失去進一步表現的機會，也可能因為太快接收了教師的結論而失去進一步思考的動力。此外，小虎也認同自己初期介入的問題大多屬於一般性的問題，例如：在波動與尋寶的活動中，他的提問的問題根本跟主題無關。

(1)有沒有人有意見？

(2)你了解題目的涵義嗎？

(3)為什麼要這樣做？

(4)還有沒有其他想法要提供的？

(5)有沒有同學要補充的更詳細一點的？

2.特定脈絡的提問為主：此方式的特色在於引導學生反思自己的目標與想法。在兩次的活動後，學生明顯地更踴躍表達想法並與同學討論，小虎也漸漸能引導學生從建模過程中學習和發展相關的知能。如此，教學過程的互動就更為頻繁，學生似乎也顯得更有興趣。深入觀察小

虎的提問情形，也發現其引導的方式比較能夠針對學生的想法提出明確具體的問題，例如：在搬傢俱的活動中，他的提問都跟主題相關。

(1)不能只轉一次到右邊嗎（確認學生瞭解題意）？

(2)為什麼要轉奇數次？你們只有講，但我看不出為什麼是奇數次（說理由）？

(3)針對他講的兩個方法，你們有什麼問題要問的（指明針對兩種方法）？

(4)除了剛剛 1×1，那我們變換一下，1×2 呢（將題目具體推廣至 1×2）？

3.啟發性的提問為主：漸漸地，學生以及教師都從中摸索出了一些討論的經驗，學生表達自己的想法也越來越清楚了，教師也能從問題討論當中更有效了解學生的想法與邏輯思考。除了較常與學生討論他們當下的想法，也提問具有啓發性的問題。例如：在搬家俱、消防局與調查活動中，他提的問題已具思考的啟發性。

(1)如果今天這個傢俱真的可以移 2m，可是移完之後卻往上一格，那怎麼辦?有沒有解?他只有想到平移，垂直要不要考慮？

(2)那你那一點是什麼心？如果有 15 點呢？

(3)他假設他資料可以調得到，確定的。比如說我可以知道七月份生日的幾個，這個是不是可以確定？…如果調查不到呢？

上述只是讓大家理解小虎在教學活動中提問方式的種類與發展過程，本文並未對此過程的穩定性或一般性做進一步的檢驗。但是一般而言，當一個老師從一般的教學情境之中轉換到需要實施互動式的討論教學情境時，因顧忌著不熟悉的教學模式與專業知識的不足而導致缺乏信心的情形下，必然面臨進退維谷的窘困。小虎反思一路走來在教學活動中所需克服的障礙有：介入的技巧與廣納意見的胸懷。

> 當面對一個建模問題時，老師如何去引導學生加入討論，或者如何介入學生的討論，討論到何種程度為止等等，這些都是需要經過一段相當長的時間去磨練的，否則可能產生達不到預期的上課效果，因此口才的訓練也是需要再加強的一環。
>
> ……
>
> 常常老師是處於一個高高在上的姿態，或是真理的代表，老師對於一個與自己想法相佐的學生是否能放下己見專心的接納學生怪異想法或天真的意見，這是一個急需訓練的課題，因要了解別人不成熟的想法也是需要花費相當多的時間的，甚至再加以整理挑出其中的精華來轉述給其他學生了解也是需要相當的功力養成。

(三)建模思維分析模式的發展過程

分析數學建模思維即始於整合啟動創意的數學思維以及理論上的數學建模過程這兩個維度，再透過分析學生的實作成果來發展與修改此初始架構。由於完整的數學建模過程中，必定面臨幾個重要的問題：什麼是現實問題中的關鍵元素和關係？可以造出哪些適合現實問題的數學模型？此數學模型如何求解？如何縮短數學模型和現實問題的差距？從這些重要的問題中，我們先抽取重要的數學思維：透過具體化來瞭解和解釋情境、透過抽象化來找到關鍵的元素和關係、透過表徵化轉換成數學問題、透過一般化和特殊化來縮短數學和現實間的差異；而且，表徵化、一般化、特殊化和抽象化等等也正是創造數學過程中所需的四種思維（Dreyfus, 1990）。除了理論上數學建模的四種子歷程：形成問題和建立模式、數學化此模式、求此數學問題的解、詮釋解答和現實作比較，我

們也預設學生可能會提出推廣應用的問題。綜合各種數學思維和建模歷程後，透過不同活動、不同觀察者的三角校正，漸漸形成一套既可用來質化數學建模思維特徵也可用來量化數學建模思維品質的分析模式。形成分析模式的步驟包含：

1.建立初始架構：以數學建模過程和啟動創意的數學思維等兩個維度來分析。
2.形成評分方式：以初始架構來量化學生的建模表現。
3.定義分析架構中各檢驗項目：形成兩個維度中各檢驗項目的定義。
4.新增檢驗項目：調整或增加兩個維度中的檢驗項目。
5.調整評分方式：當量化結果和質性分析不符時，原評分方式則需調整。
6.評分標準精緻化：在解題和詮釋的子項目中又增加一個評分維度。

詳細的步驟內容及學生反應原案說明請參閱林福來等人（2003），表 3、4 分別是數學思維和建模過程的編碼架構。

研究發現與討論

研究發現首先描述在本研究所提供的學習脈絡下，足以支撐參與教師在一般教學中融入數學建模活動的策略。接著，以研究過程中所面臨的疑惑來說明教師與研究者間的互動歷程，並進一步探討促進教師反思的潛在機制為何。希望為往後創新教學知能的培育與推廣，提供可具體實行的策略與可一般化的啟動力。

一、支撐參與教師融入數學建模活動的策略與成效

為提出實徵結果以突顯可支撐參與教師在一般教學中融入數學建模活動的策略與成效，先以小虎的內在既有經驗與外顯教學行動間的互動為主軸，外來的支援為支線，來說明本研究對小虎所提供的學習脈絡。本研

表 3：數學思維編碼架構

數學思維編碼	操作型定義
具體化或再具體化	在情境中操作或從數學世界回到情境中的運思。
一般化或特殊化	只探討所給資訊的特殊情形或提出可一般化的解題策略。
表徵化	使用有助於解題的符號或圖表。
抽象化	點出情境中重要的元素或結構。
類比	連結至其他類似的情境問題。

表 4：數學建模過程編碼架構

數學建模過程編碼	操作型定義
零散的想法	無關、模糊或純直覺的說明。
清楚且完整的想法	用此想法可合理解決本問題，但不一定可一般化。
用數學語言表達	用到數學概念來描述情境特徵。
解數學模式	求出數學模式的解。
詮釋數學解的意義	清楚描述數學結構與情境結構的關係。
推廣和應用至其他問題	進一步找出充分或必要條件。應用在其他非例行性問題。

究透過瞭解教材(a)、分析教學過程(b)、分析建模思維(d)、重擬教學介入(e) 等學習脈絡，協助小虎累積豐富的建模教學經驗並從中發展其建模教學知能，並藉由觀摩他人教學(c)希望刺激小虎能夠經由對照比較而產生懷疑；最後，小虎主動提出調整教材(f)，也表示主導教學目標設定的角色已逐漸轉移至小虎身上。

這些學習脈絡（如圖 1）以相互交織的方式進行著，其共同目標是協助小虎設計數學建模教材並進行建模教學活動，以發展小虎的專業知能。圖中箭頭的起點是指該學習脈絡的來源是來自於小虎的內在既有經驗、外顯教學行動或外來的經驗與行動，箭頭的方向是指該學習脈絡直接影響的人或事。例如：分析建模思維(d) 被放在三個箭頭中，它的起源有來自於小虎回顧自己做建模的問題，此起源影響教師對建模活動的教學安排。它的起源也有來自於觀察他人教學中學生所呈現的建模思維，此起源可能影響教師接下來的活動設計，所以箭頭並未明確指向內在既有經驗或外顯教學行動。

各學習脈絡相互交織的方式有時是在同一種脈絡中來來回回地討論與修正，有時是在不同脈絡中以遞迴方式演化。例如：在設計教材中也透過預測學生反應來設想實作教學的過程，再以分析實作教學的經驗來設計下一次的活動教材（a-b-a-b）。或是以發展建模思維分析架構作為瞭解學生反應的活動，再改善教材設計，並以學生在新建模活動中的反應調整分析架構，調整後的架構又用來作為重擬教學介入的參考（d-a-d-e）。接下來進一步描述各學習脈絡的目標與策略，並以教師在該脈絡中所顯現的成長作為此策略之成效的間接證據。但是，這並不表示此成長的面向一定符合設定的目標，也不表示此成長只是或主要是受到該策略的影響。

(一)瞭解教材 (a)

1. 目標：瞭解建模活動的內容並具備安排建模問題的知能。
2. 策略：儘可能想出不同的解法（例如：想一想在消防局問題中，學生可能會用哪些方式來定義距離。），提出可能的錯誤類型，想一想應該如何適時地介入引導學生思考。
3. 成長：在活動進行中，仍發現學生許多思考是出乎意料之外。剛開始小虎對於研究者所提供的教材並不會作大幅度的調整，比較著重在課本教材的相關性，研究後期漸漸擴充到關心與學生既有經驗的聯結性與問題引發學生思考的多樣性。例如：研究後期的「調查法」活動中，小虎注意到應該佈置探究性的問題來發展學生有關條件機率的概念；也思

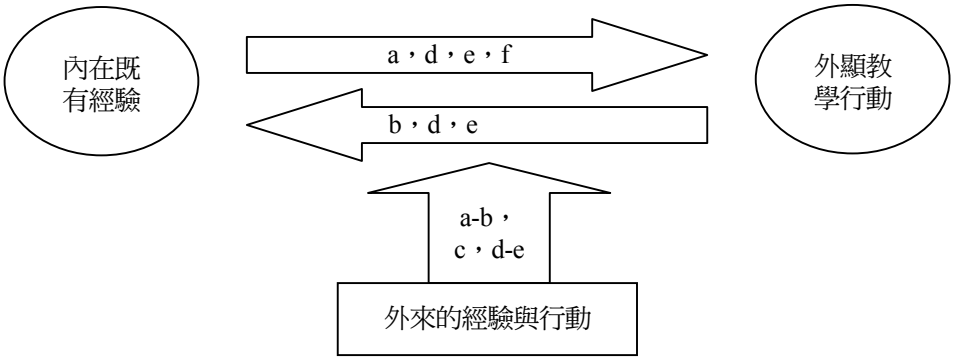


圖 1：支撐教師成長學習脈絡的定位

考到生活教育的層面，建議提高正確測出陽性結果的機會，不然學生所推得的測出陽性但確實染病的機會不夠高，即使測出來是陽性結果但可以斷言真正有的機會只是 0.6 左右，如此可能造成學生僥倖的心理，

(二)分析教學過程 (b)

1.目標：發展執行建模活動的能力。

2.策略：透過實作教學與分析教學的活動，製造教師反思的內容與機會（例如：回顧搬傢俱問題的活動歷程，討論如何提問能幫助學生理解並納入他人的想法來改進自己的想法。）。

3.成長：小虎從高度可預測性的一般教學中要轉換成高度測不準的建模教學過程，除了需要加強準備相關教材內容以應付突發性的想法，也要調整教學心態。小虎逐漸改以教學相長的態度面對建模教學，將教學中與學生討論過程視為自我教學成長的一部分，而且對於建模活動也有了更深刻的體驗。例如：從提問方式之發展過程中，我們發現小虎在剛開始的「波動」和「尋寶」的活動，教學方法還是偏向教師主導的方式，在「搬傢俱」的活動中則出現旁觀提示者的角色。接著，在「電信局的位置」和「調查法」的活動中，教師又分別表現出經營管理者和有預謀的參與者的角色。使得小虎的角色更趨多元與彈性的原因，除了建模教學經驗的累積，這可能也和建模活動的特性相關，「波動」和「尋寶」都屬於局部性的建模問題比較像傳統的擬題或解題，也是小虎熟悉的問題。但「搬傢俱」是屬於資訊充足且結構完整的建模活動，學生想法的多樣性已超出事先預測的範圍，所以在教學當下小虎即著重在幫助學生清楚表達自己的想法以及提示想法可能存在的不合理性。由於小虎參觀過某位教師在「設消防局」的教學活動，在「電信局的位置」更能順利看到聽到學生想法的關鍵點，進而加以引導。在「調查法」的活動中，曾有預謀地以具啟發性的方式和學生一起討論資料的取得問題，並非直接給予哪些資料是可取得的假設。

S：你可以問間接的問題。比如看你手上有什麼數據哦，假如說你手上有去 PUB 的人，每 5 個有 1 個服用搖頭丸，你只要有這個數據，你只要問到有多少人去 PUB，這樣就好了啊！

……

T：好，分會上的和不會上的，然後呢？

……

T：他假設他資料可以調得到，確定的。比如說我可以知道七月份生日的幾個，這個是不是可以確定？…如果調查不到呢？…。

……

T：那我們現在是假設已經調查了，還是想要去調查？

(三)觀摩他人教學 (c)

1.目標：刺激小虎調整建模教學。

2.策略：透過觀察不同背景的學生以及不同的教學方式，來激起更多問題設計和教學序列的討論與改變（小虎與研究者至另一所學校觀摩某位教師進行消防局建模活動的歷程，導致小虎提出將該活動的情境改為電信局，以利誘導學生主動定義距離來說明何謂最佳位置。）。

3.成長：透過一次參觀其他教師的建模教學實作，看到不同背景的學生有不同的思考模式（例如：「先想數學方法再探討現實假設和意義」），或相同的反應（例如：「都想到國中所學平均數的概

念」），讓小虎更相信建模活動可以啟發各種學生的多元思考，確實是一個值得推廣的教學活動。而另一位教師不同的教學方式，也激起小虎考慮增加使用輔助教材或器材，以增強動機或理解的可能性。在小虎的反思札記中也提到可組成合作教師團隊來促進教師的成長，但在現實的情況下尚未付諸行動。

所謂教學相長，教師除了課堂上要教學生之外，平日教學後的一些問題若能和同事互相討論各種教學技巧、提問的問題優劣、提問的方法、學生的特殊想法、引導的過程所遇到的問題等，相信也能從中獲得許多對教學有幫助的東西。

(四)分析建模思維 (d)

1.目標：瞭解學習與思考的特徵。

2.策略：先提供初始架構，再以形成數學建模思維定義與分析學生建模思維特徵共同演生的方式來擬定數學建模思維的分析模式（例如：研究者先建議將數學建模思維分成數學思維和建模歷程兩個維度，再討論維度中可含有哪些編碼及編碼的定義。）。

3.成長：進行學生思維的分析討論時，大家對於同一個學生所發表的想法各有不同的理解，剛開始都得經過很長時間的意見交換才得到共識。造成看法相左的原因，可能是學生數學知識與經驗的缺乏導致表達不清，也可能由於每個人都慣於遵循自己的思考脈絡去解讀學生的思考，這些原因也可以用來解釋為什麼教師要在當下有效理解學生的發言十分不易。由於這個分析模式中包含數學思維與建模過程兩個向度及各向度的多個子類別，也促使小虎反思建模表現評分方法的缺失與建議如何改進評分方法。

若教師能採用較為開放的態度（多元的角度）來評分，例如採用討論多寡、報告的優劣、討論的內涵、參與的程度等來評分，相信學生會更主動投入各種教學活動，且老師更能清楚知道學生學到了什麼。

(五)重擬教學介入 (e)

1.目標：改善教學介入的技能。

2.策略：以分析建模思維的工具配合 Kieren 和 Pirie（1992）提出的拉回（invocative）、確認（validating）和外推（provocative）三種不同引導方式，作為重擬介入的架構。拉回是指幫助學生回顧之前的議題或想法，確認是讓學生說清楚講明白，外推是激發學生想出新點子並進一步檢驗或質疑既有的猜想。

3.成長：小虎認為一般課堂上的教學特徵通常是老師扮演發問者的角色，而學生扮演回答者或是聆聽者的角色。但是在建模教學的方面，可以讓學生有機會在發表想法之後又互相提問，並由學生自行解釋回答同學的問題，這可以培養學生的組織能力，現場反應能力。基於小虎的提問方式也看出其從主導者自然轉變成輔助者、引導者的角色。雖然小虎知道建模教學時，在聽完學生的許多不同意見或想法之後，要能依其想法提出相關的問題，幫助學生自己發現思考的盲點或錯誤，最好不要由教師直接指出錯誤，這才能培養學生自我調整的能力，之後學生也能漸漸從中體會習得的成就感。但這個部分的成長尚未具體呈現，還處於統整的狀態。

(六)主動調整 (f)

1.目標：展現專業自主。

2.策略：提供上述各學習脈絡中的策略後，觀察小虎是否統整出自己的主張。此說法是要表明綜合上述策略雖已構成讓教師專業成長的條件，但未必都能促成教

師展現專業自主的意向。

3.成長：研究的運作方式，剛開始是由研究者先設定方向後，再由大家分工與共同討論來完成一次又一次的子目標。在這樣的運作方式與多樣學習的機會下，我們期待小虎能演變成主導的角色。小虎專業自主的表現，有研究初期自我調整教學實作，研究中期改變活動設計，研究後期釐清數學思維編碼的意義到主動設定子目標。其產生影響力的面向已從實作面跨足至理論面，其產生影響力的角色也從執行者演變成主導者。

一開始在研究者的邀約與建議下（suggestion），小虎投入了建模教學的協同行動研究，並在各種學習脈絡的成長中分別呈現出Dewey（1933）五種階段的反省思維：suggestion（建議或其它的選擇）、intellectualization（有目的地思考）、the guiding idea（主要想法）、reasoning（評估推論）and testing（試驗看看）的子循環。例如：小虎對佈題設計的考量從課本教材的相關性、問題情境的多元性與子活動順序的流暢性，已逐漸擴充至關心與學生既有經驗的聯結性與教材引動學生發展建模策略的多樣性；教學方法的使用也從主導者、偏向旁觀提示者、經營管理者，逐漸展現偏向有預謀的參與討論者；對學生建模思維的瞭解，也從數學解題的觀點轉化成數學建模的思維模式。其中研究者所提供的建模教材或建模思維分析模式即屬suggestion，小虎的對佈題設計的考量、教學方法的使用或學生思維的瞭解即屬 intellectualization，再透過協同行動研究中的學習脈絡進行 reasoning 和 testing，則促成小虎在各脈絡中的成長。在下一節的 (一)教師與研究者參與建模教學的互動歷程中，將透過疑惑的產生和排除來呈現小虎的 reasoning 和 testing。

檢視小虎在設計佈題、實作教學與擬定建模思維分析模式的成長後，也驗證提供教材資源有助於建立小虎實作的信心，利用觀摩其他教師的教學可突破其反思的侷限，而開放討論數學建模思維的分析模式也激發小虎設計新的教學活動。這些不同的學習與實作經驗，包含發展建模教材與分析學生建模思維，增長了小虎在數學建模中所需的**建模教學知識**，也透過一次又一次的教學與反思行動，尤其是教學互動中提問方式的改變，提昇了小虎的**建模教學執行力**，漸漸小虎對於如何調整教材以配合學生的學習與數學建模的教學也形成自己的主張。

二、促進參與教師反思的潛在機制

本研究除了依據小虎在學習脈絡中的支撐策略下所顯現的成長外，也試著從「解惑」觀點詮釋研究者與小虎的互動歷程，作為深入探討促進小虎反思的潛在機制的基礎。

(一)教師與研究者參與建模教學的互動歷程：疑惑的產生與排除

雖然產生疑惑並不一定造成認知衝突，但已是教師進行反思的開端；所以本研究就以產生疑惑和解除疑惑的觀點來分析小虎與研究者的互動歷程，藉以突顯在此過程中可能促進教師反思的潛在機制。

1.與設計活動相關的疑惑之產生與排除

(1)疑惑的產生：在進行調查法的活動時，發現有些學生剛開始顯得興趣缺缺，但到進行第三個問題時，卻像換個人似的積極投入討論。這引起我們懷疑哪一種建模問題的安排程序：漸進式（始於易）或逆向式（始於難），才是有利於學習的呈現方式。依據小虎固有的經驗，由易至難的引導總被認為是較好的教學模式（小虎的 reasoning）。但經過這次的教學實作（小

虎的 testing），小虎認為學生的反應似乎顯示有挑戰性的問題更能引起學生的興趣，不一定要拘泥於過去的引導形式。另一方面，研究者也進一步提供可以依照學生的學習風格來考量的建議，如果是喜歡挑戰的學生可採用先給難題再引導的逆向式；如果是喜歡安全支持的學生則可採用漸進引導的方式。

(2)疑惑的排除：接著在研究的後半年試圖從各次的建模活動中形成共通性的架構與原則時，我們進一步討論三種類型的搬傢俱活動的難易程度。我們都同意判斷搬動 1 × 2 的傢俱是否可以轉到相鄰的位置上且面向同一方向對學生而言是最容易的，因為學生可透過幾次的操作來找到一組可行的解（共同的 reasoning）。但在搬動 1 × 1 的傢俱時，不一定能夠說出為什麼 1 × 1 是無法轉到相鄰的位置上且面向同一方向。當然此問題需要將傢俱的轉動抽象化成點的移動，並一般化成多次移動的組合，兩者都需要更高階的思考層次，所以搬傢俱活動也可分為三個由易到難的程度：1 × 2、1 × 1、m × n。

(3)改變：討論 1 × 1、1 × 2 和 m × n 問題的安排程序時，小虎基於建模教學經驗中和反思時的體驗，也希望依照學生的學習風格和背景知識來考量佈題的先後順序，而提出如果是中上程度的高中生或許可以從 1 × 1 開始，如果是中下程度的高中生或許可以從 1 × 2 開始。

(4)猜測啟動改變的原因：教學實作加上討論與對照不同觀點的「體驗」後，自然增加思考的廣度，不僅區分問題的難度也考量學生的學習風格。

2.與教學實作相關的疑惑之產生與排除

(1)疑惑的產生：「消防局活動」與「電信局活動」的教學現場中，學生呈現出來兩種不同的思維方式：部分學生是在沒有確切現實目標的情況下，找出一種設地點的數學方法作為解（如原案 4-4-1：…，把 X 坐標平均，Y 坐標也平均，這樣子的話，會找到一個點…），若有餘力再詮釋此種解法對應在現實上的意義與優點（如原案 4-4-4：我後來發覺了啊!…，它（算數平均數）會靠越密集的地方越近，越不密集的地方越遠，…，它是風險!）；部分學生則選擇先設定一個現實中的目標，再想一個設地點的方法以解決此問題（如原案 5-1-1：現在要架設這個東西的好處的話，現在就是想，他如何架設線路比較省，…，我可以把這所有需要線路的區域的座標加起來，然後除以那個總數…）。學生所採的思維方式會受到教師引導的影響，因此，對於教學實作時該引導學生採用何種思維方式曾有一番討論。剛開始小虎直覺地認為「解題→詮釋→釐清目標」的方式似乎是比較盲目且不嚴謹的，因此主張應該將學生引導至「設定目標→形成模式→解題」的思維方式（小虎的 reasoning），也就是將教學活動分為兩階段：先請學生明確指出目標（如：希望總距離最小、最遠距離最小……等），依不同目標的詮釋來形成其對應的數學模式並解題；但研究者認為或許可採取比較開放的態度，不如讓學生自由解題後，再藉由探討此數學解的情境意義來釐清潛在的對應目標。

(2)疑惑的排除：研究者和小虎共同回顧某位教師實作數學建模教學觀摩過程（共同的 testing），其學生所呈現的反應類型，依此設想學生既有的數學知識和思考模式，討論在哪種情況下該用什麼教學方式，及這兩種方式下教師該扮演的角色。

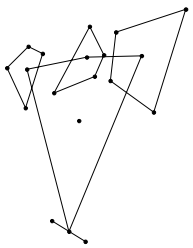
(3)改變：經過討論之後，小虎和研究者均達到共識，兩種思維方式各有優缺點。小虎也認為若限定採用「設定目標→形成模式→解題」的思維方式，可能導致學生因目標難以釐清或過於多樣化，而難以形成模式。所以在教學實作中可開放多元的思維方式，再引導學生交替使用這兩種方法：當學生採用「解題→詮釋→釐清目標」的方法時，則引導學生提出此解法對應情境的優缺點，並就其詮釋的意義修正原先提出來的解法，使之更貼近詮釋意義的目標；若學生採用「設定目標→形成模式→解題」的方法時，除了協助學生找出解法外，如果學生在解題遭遇困難時，也可提示他先簡化目標的條件或情境來找出合適的解法。

(4)猜測啟動改變的原因：當研究者提出「是什麼原因能引發學生各種不同想法」的問題時，小虎回顧自己調整的「電信局活動」與觀摩其他教師實作的「消防局活動」，經由反覆對照比較學生的反應與教師的教學後（即對照不同觀點的「體驗」後），其中一點感想即是「可能是在消防局的活動中，教師未企圖引導學生朝向既定的數學模式，所以才能引動學生從平均數或找重心等數學方法來詮釋此現實情境」。另外，我們剛接觸此題目時，為了比較不同距離的定義方式下最小化最遠距離的方法，也是經過多次的討論才得到適切的答案，更遑論數學背景較薄弱的高中學生，因此贊同不一定必須先引導學生去設定目標。也就是說，小虎透過自己做建模的經驗來「同理化」學生的建模過程，而調整了原始單向引導的主張。

3.與建模思維相關的疑惑之產生與排除

(1)疑惑的產生：研究者認為以一個初始的架構作為分析起點，此架構主要先定出兩個向度 — 數學思維以及理論上的數學建模過程，以四種思維和四個子歷程作為分析數學建模思維的初始架構，再經由分析學生的反應，一方面明確化不同思維和不同歷程的意義，一方面調整兩個向度的元素。而小虎認為應該先把架構中不同思維和不同歷程的意義定義清楚，再來分析學生的反應才有效率(小虎的 reasoning)。

(2)疑惑的排除：研究者先從文獻中找到一些對於不同思維和不同歷程的描述，再舉一些例子讓小虎瞭解此初始架構的暫定意義，依此作為溝通的基礎也有利於往後分析學生的反應。而小虎也嘗試以此初始架構來分析學生的反應，並主動補充或調整不同思維的意義（小虎的 testing）。例如：學生在討論設計消防局的最佳位置時，提出：



“上面就是很多點嘛！大概有十二點，就我們先看上面的四個圖啊！我們就可以大概找出它們的最“中”點在那裡!!……，所以只能找出中點，然後

再將這四個點連起來，就再造成另外一個四邊形，然後再把中垂線給找出來，然後點出交點，大概就是消防局的位置!這樣畫的話，到所有頂點的距離，其實都會差不多。”

而小虎分析此原案時，認為「只有畫線未在表徵上有所轉變」不算是表徵化，進一步討論與比較不同的原案後，我們將表徵化的定義從「有用到簡化的記號、圖表或式子」修改為「使用有助於進一步運算的記號、圖表或式子」。

(3)改變：研究者發現過度模糊的架構不利於有效的溝通，也有礙於教師對於現象的瞭解；所以必須提供有點模糊但又有感覺的初始架構作為一個可供調整的參考點。有了共同的目標（瞭解學生的思考方式）與具體的經驗（學生的反應），儘管剛開始討論時彼此的用詞並不明確，但也因此增加反思的機會，最後不僅明確化各項目的定義，也把分析架構的數學思維擴充出類比這個項目。

(4)猜測啟動改變的原因：小虎在定義化的過程中，由於對於數學建模思維的分析架構之「不確定感」，必須透過假設與檢驗的過程來形成分析架構元素的定義。如此，既能加深小虎對於學生認知的瞭解，也可增加其活用評量工具的可能性。

(二)促進教師反思的潛在機制

在研究初期小虎即想要以學生為中心，小虎基於既有的教學經驗認為這是很重要的也應該要落實的，但是其落實的方式是透過瞭解哪些概念對學生而言是較抽象難懂的，那麼必須在講解這些概念時特別地思考學生可能難以理解的部分來補充說明。所以，研究者稱小虎此時只是抱持一種「以學生為中心」的擬信念。此說法是類比 Vygotsky 的擬概念（pseudo-concept），是指教師以某個詞表達個人的教學意象，並且也使用這個詞與他人互相溝通自己的教學方式。但是從理論的觀點來看，教師並未真正抱持這個詞所蘊涵的信念。Pedersen 和 Liu（2003）在探討教師對「以學生為中心」所下的定義時，發現有些教師認為基於學生的背景來設計教學就是以學生為中心的意義，而小虎的想法也與此類似。

小虎知道以學生為中心的考量是重要的，可是在教學中不見得能具體實踐。此現象除了受限於課程的進度壓力外，主要也是對於何謂以學生為中心未有深刻的體認。但是，小虎在體驗與收集一次又一次的事件後，不僅增強了其思考的廣度（例如：問題的難度、學生的學習風格、建模思考的元素。）和深度（例如：學生的數學建模思維、從學生的思維來設想數學建模過程。），也真能影響其往後的教學行動。例如：從與活動設計相關的疑惑之產生與排除中，小虎如何解釋學生的反應確實顯示出其考量的主體已轉移至學生身上。此外，最後在反芻「什麼是數學建模」時，小虎也是自發地從學生的角度來思考此問題。

數學建模主要讓學生體驗多面向的思考，在教學的過程中是以學生為中心，不同於以往著重在教師的教材統整、呈現方式與表達能力。而是需要由教師去傾聽學生的想法，再引導學生統整改善自己的想法。

促使小虎在經由實際的建模教學經驗以及共同分析解釋學生的反應後，能夠在往後的活動設計中實踐「以學生為中心」的改變歷程之關鍵機制即是「**雙重體驗為憑的交流**」。也就是說，有兩種類型的體驗是缺一不可的。一種是自我實作的體驗，另一種是反思自我或他人實作的體驗。前者經由教學行動來呈現教師「以學生為中心」的擬信念，

後者則是透過對照和比較不同的體驗來擴充擬信念的內涵，或是經由檢討與擬信念相衝突的事例來反思活動設計的多元性；由於這兩種體驗讓小虎能夠主動地提出依學生的反應來調整建模活動的安排。如果缺少自我實作的體驗，小虎只能透過反思他人實作來論述建模活動的優缺點，可能削弱小虎因衝突或比較而改變行為的可能性。如果只有例行性的實作而缺乏反思的部分，則在這一年半中可能觀察不到小虎對「以學生為中心」的改變。雖然該研究限於時間與觀摩教師的配合意願，小虎只觀摩過一位對建模也不熟悉的教師進行建模教學，但在「雙重體驗為憑的交流」中仍可提供教師豐富的資源平台，讓小虎比較容易主動提取不同資源來對照自己和學生的建模經驗。

小虎在與教學實作相關的疑惑之產生與排除中，開始質疑原先對學生建模過程的認識，是否需要僅依循先釐清目標、形成模式再進行解題與解釋的模式？難道學生先解題後，再依據學生的想法來引導詮釋與釐清目標就不好嗎？研究者想藉此機會建議小虎思考在介入時何謂依照學生的想法來引導，希望讓小虎從啟發介入再擴充出思維模式介入，前者著重在啟發思考問題、方法或解答的合理性與有效性，後者從後設認知的功能切入來引導學生監控與調整自己的思維。雖然小虎尚未發展至以思維模式介入的階段，但因反思自己建模經驗的監控與調整過程，而對於學生的建模過程模式產生「同理心」效應（Rogers, 1964），應該有助於鞏固或深化小虎當下「以學生為中心」的擬信念；也就是說，以學生為中心對教師的重要性更為增強，但未必在行動上也能展現符合該信念的教學行為。如果小虎只具有自己從事建模活動的經驗，但缺乏將此經驗類比到學生的建模過程中，那麼即喪失產生「**同理心的投射**」機會，而無法有彈性地破除「設定目標→形成模式→解題」單向引導的堅持。至於還需要透過什麼樣的機制，才能幫助小虎能到達思維模式介入的階段，仍有待進一步的研究來回答。

在與建模思維相關的疑惑之產生與排除中，小虎原設想以數學結構的模式：先釐清定義再進行解題，來分析學生數學建模思維的特徵，但研究者提出數學建模思維的定義應該也是一個需要探究的問題，建議不妨考慮以形成建模思維的定義與分析學生建模思維特徵共同演化（下定義歷程）的方式進行分析。並與小虎討論兩種不同方式獲取定義的優缺點，最後總結共同演化不僅可以避免遺失台灣學生可能特有的思維方式，也有助於小虎深入瞭解學生的思考而強化其對此分析模式的可應用力與可調整力。或許是小虎與研究者共同面臨「什麼是數學建模思維」的不確定性，不僅讓小虎能夠體驗研究中建構意義的歷程，也因此讓小虎在分析數學建模思維的過程中自主地發揮影響力。在對於數學建模思維意義之「**不確定感的激發**」下，透過假設檢驗的探索過程發展出建模思維的分析模式。如果缺少了這種不確定感，也就是改由依照研究者提供的架構來分析學生的思維，如此即失去激發小虎透過意義建構來理解數學建模思維的催化劑，而小虎很可能需要更久的時間才能瞭解學生的建模思維。

綜上所述，「**雙重體驗為憑的交流**」、「**同理心的投射**」和「**不確定感的激發**」被認定為促進教師反思成長的關鍵機制，而啟動這些機制運作的共通特徵即是：**製造不同的經驗來產生疑惑感**，並透過**排解疑惑感**來啟動教師的反思需求與改變。從小虎在研究後期對談中所表達的意思，

> 不可否認的，每個人都曾因慣於遵循自己的思考脈絡而造成誤解，這也顯示出個人的背

景或預設想法確實會對訊息接收產生很大的影響。將之對應至教學現場，則突顯出教師要在第一時間，正確理解學生的發言是十分不容易的，但誤解所導致的錯誤介入卻可能扼殺許多原創性的想法。因此，課前的準備固然是非常重要的，但實際進行建模活動教學時，就必須將自己盡量放空，沒有任何立場的聽取學生的發言，才能快速的融入學生的想法，提供學生更適切的協助。而活動後的分析也是準備下一次活動的重要任務之一。

可知其「以學生為中心」的想法已深化為「**行動前準備、行動中放空、行動後反思**」的層次。因此，在「雙重體驗為憑的交流」、「同理心的投射」與「不確定感的激發」等潛在機制的作用下，除了發展小虎的數學建模教學知能，對於其「以學生為中心」的信念也產生影響。

建　　議

是什麼樣的學習歷程促成參與教師的改變？不是因為參與教師一開始就很清楚數學建模教與學的目標，也不是因為事先已設計周全的計畫，而是透過多次的設計活動、分析實作教學與學生思維的互動歷程中，可以累積具體的經驗、調整共同的目標、對照不同的觀點以及回顧做建模或進行教學的過程，而帶來足以啟動與支撐不斷反思的力量。在「**雙重體驗為憑的交流**」中可以提供教師豐富的資源平台，提取不同資源來對照自己和學生的建模經驗或是自己和他人的教學方式；同時經由「**同理心的投射**」，可以促使教師的提問方式有所精進；配合「**不確定感的激發**」，除了讓教師能依據學生的思考特徵設計新的教學活動，也能設想如何結合學生不同的想法與抉擇介入的時間。這些機制的共同特點是讓教師對教或學產生疑惑感，並能進一步解決問題以排除疑惑。

建模活動的問題不同一般的數學課本的練習題，所以在高中數學教學融入建模活動時，首要先有相關的建模問題讓教師參考，再逐漸擴展教師設計教材的考量層面：以課本教材的相關性為主、反思問題情境與順序的流暢性、關心與學生既有經驗的聯結性與問題的多樣發展性。在教學方法的調適上，除了注意提問方式的改進，教師也可能需要經歷主導者、偏向旁觀提示者、經營管理者與偏向有預謀的參與討論者等角色。對認知與學習的瞭解，可提供教師未完善的定義作為分析學生建模表現的架構，以增加教師教學反思與改進的機會。

如果未來的研究朝向數學建模教與學的推廣時，本研究建議除了本文提出足以支撐教師專業發展的策略外，也可參考促進反思的潛在機制：「**雙重體驗為憑的交流**」、「**同理心的投射**」和「**不確定感的激發**」，針對不同教師的學習特質來設想其他可能有效的策略。例如可以進一步思考下列的問題：(1)雖然從擬信念發展至真正可落實的信念，猶如擬概念發展成科學概念般，並不一定只能依賴認知衝突也可能透過多重的對照比較來擴充擬信念的內涵來達成。但是，究竟充實何種經驗與如何充實才能讓教師有雙重體驗的交流機會？(2)同樣地，雖然我們已經察覺同理心是幫助教師瞭解學生學習特徵的潛在機制之一，但是以什麼樣的脈絡和工作需求才能有效地促進教師能以同理心的方式來瞭解學生的學習特徵？(3)在什麼條件下，協同行動研究可以更有利於教師的專業成長？本研究對未來的期許是：希望教師透過不斷體驗設計教材、分析教學與學習的過程，不僅能以數學結構評價數學學習也能以同理學習數學者的心智來欣賞數學，進而把專業成長

關注的焦點從反思的實作者轉變成經驗豐富的理論家。

致　　謝

感謝參與教師小虎及其學生的支持與配合，以及研究助理呂又寧協助資料的收集與整理，同時感謝審查委員的細心指正與批評使得本文更臻完備。本研究承蒙教育部對於創意教師行動研究計畫的補助和國家科學委員會的部分補助（NSC94-2521-S-003-001）得以順利完成，特此致謝。但是，文中論點為作者所有不代表教育部和國家科學委員會。

參考文獻

1. 大學入學考試中心（1999）：指定科目考試規畫研究(一) 研究報告。
2. 林福來、楊凱琳、陳嘯虎和呂又寧（2003）：**透過數學建模活動培養高中生的數學創造力**。教育部顧問室創造力教育計畫結案報告。
3. 沈翔、趙小平和康合太（2001）：**用高中數學解日常生活的問題**。台北市：九章。
4. Argyris, C., Putnam, R. & Smith, D. M. (1985). *Action science*. San Francisco: Jossey-Bass.
5. Blum, W. (2002). ICMI study 14: Applications and Modeling in mathematics education-Discussion document. *Educational Studies in Mathematics, 51*(1), 149-171.
6. Brookfield, S. (1995). *Becoming a critically reflective teacher*. San Francisco: Jossey-Bass.
7. Burrill, G. (1997). The NCTM Standards: Eight years later. *School Science and Mathematics*, *97*, 335-339
8. Cai, J. & Lo, J. J. (2002). Intended treatments of arithmetic average in U.S. and Asian school mathematics textbooks. *School Science and Mathematics, 102*(8), 391-404.
9. Campbell, P. F. (1997). Connecting instructional practice to students thinking. *Teaching Children Mathematics, 4*(2), 106-111.
10. Cooney, T. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. In F. L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp.9-31). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
11. Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Chicago: D.C. Heath.
12. Doerr, H. M. & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.
13. Dorward, J. (2002). Intuition and research: Are they compatible? *Teaching Children Mathematics, 8*, 329-332.
14. Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 25-41). Cambridge: Cambridge University Press.
15. Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. *PME24, 1*, 55-69.
16. English, C. (1999). Modelling for the New Millennium. In C. Hoyles, C. Morgan & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 118-129). London: Falmer Press.
17. Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. & Empson, B. (1996). A

longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 403-434.

18. Frank, S. & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum: a resource guide of classroom exercises.* Virginia: NCTM, Inc.
19. Fullan, M. G. & Miles, M. B. (1992). Getting reform right: what works and what doesn't. *Phi Delta Kappan, 73*(10)*,* 745-752.
20. Garfunkel, S., Godbold, L., Pollack, H. & Bellman, A. (1998). *Mathematics: Modeling our world*. MA: COMAP, Inc.
21. Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht: CD β.
22. Heaton, R. M. & Mickelson, W. T. (2002). The Learning and Teaching of Statistical Investigation in Teaching and Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 35-59.
23. Henner, E. K. & Shestakov, A. P. (1997). The mathematical modelling course for Russia's schools: its aims, methods and content. In S. K. Houston, W. Blum, I. Huntley & N. T. Neill (Eds.) *Teaching and Learning Mathematical Modelling* (pp. 203-210). Chichester: Albion Pub.
24. Herman, W. E. (1998). Promoting pedagogical reasoning as preservice teachers analyze case vignettes. *Journal of Teacher Education, 49*(5), 391-397.
25. Hiebert, J. & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*, 393-425.
26. Houston, S. K., Blum, W., Huntley, I. & Neill, N. T. (Eds.) (1997). *Teaching and Learning Mathematical Modelling*. Chichester: Albion Pub.
27. Ikeda, T. (1997). A case study of instruction and assessment in mathematical modeling-the delivering problem. In S. K. Houston, W. Blum, I. Huntley & N. T. Neill (Eds.), *Teaching and Learning Mathematical Modelling* (pp. 51-62). Chichester: Albion Pub.
28. Jaworski, B. (2001). Developing mathematics teaching: teacher, teacher-educators and researchers as co-learners. In F. L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 165-183). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
29. Kaiser, G. & Willander, T. (2005). Development of mathematical literacy: results of an empirical study. *Teaching Mathematics and its Applications*, *24*(2-3), 48-60.
30. Kieren, T. E. & Pirie, S. E. B. (1992). The answer determines the question: Interventions and the growth of mathematical understanding. *PME16, 2*, 1-8.
31. Laborde, C. (2001). The Use of New Technologies as a Vehicle for Restructuring Teachers' Mathematics. In F. L. Lin and T. J. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 87-109). The Netherlands: Kluwer.
32. Lege, J. (2005). Approaching minimal conditions for the introduction of mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications, 24*(2-3), 48-60.
33. Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T. & Zawojewski, J. (2003). Using a translation model for curriculum development and classroom instruction. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Be-*

yond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching (pp. 449-464). Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey.

34. Lesh, R. & Doerr, H. M. (Eds.) (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
35. Lesh, R. & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical thinking and learning, 5*, 109-129.
36. Lin, F. L. (2003). Issues of integrating mathematics into pedagogical knowledge. *Annual Conference of the Korean Mathematics Education Society*, Korea, Feb 22.
37. Lin, F. L. & Cooney, T. J. (Eds.) (2001). *Making sense of mathematics teacher education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
38. Lin, F. L. & Tsao, L. C. (1999). Exam Maths re-examined. In C. Hoyles, C. Morgan & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 228-239). London: Falmer Press.
39. Lin, F. L. & Yang, K. L. (2005). Distinctive charateristics of mathematical thinking in a non-modeling friendly environment. *Teaching Mathematics and its Applications, 24*(2-3), 97-106.
40. Lin, P. J. (2002). On Enhancing Teachers' Knowledge by Constructing Cases in Classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(4), 317-349.
41. Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1985). *Thinking mathematically*. California: Addison-Wesley Publishers.
42. Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. Retrieved October 15, 2004, from http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf.
43. OECD (2003). PISA 2003 assessment framework: mathematical literacy. Retrieved October 15, 2004, from http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/38/51/33707192.pdf.
44. Pedersen, S. & Liu, M. (2003). Teachers' beliefs about issues in the implementation of a student-centered learning environment. *Educational Technology, Research and Development, 51*(2), 57-76.
45. Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence*. London: Routledge & Kegan Paul.
46. Ponte, J. P., Oliveira, H. & Varandas, J. M. (2002). Development of pre-service mathematics teachers' professional knowledge and identity working with information and communication technology. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 93-115.
47. Potari, D. & Jaworski, B. (2002) Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 5(4), 351-380.
48. Rogers, C. R. (1964). Toward a modern approach to values: The valuing process in the mature person. *Journal of Abnormal and Social Psychology, 68*, 160-167.
49. Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner*. NY: Basic Books.
50. Sparks-Langer, G. M. & Colton, A. B. (1991). Synthesis of research on teachers' reflective thinking. *Educational Leadership, 48*(6), 37-44.

51. Tirosh, T., Stavy, R. & Tsamir, P. (2001). Using the intuitive rules theory as a basis for educating teachers. In F. L. Lin & T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 73-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
52. van Zoest, L. & J. V. Bohl (2002). The role of reform curricular materials in an internship: The case of Alice and Gregory. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(3), 265-288.

附錄一　數學建模活動概述

活動名稱 / 特徵	波動	尋寶	搬傢俱	消防局（電信局）	調查法
相關的數學學習內容	三角函數	複數	座標、向量	幾何、函數	統計、機率
問題概述	下列這個波形，你認為可以用三角函數的組合或變換來表示嗎？最少要多少種三角函數(圖形或符號表徵)的組合或變換，才能表示所有的三角函數？	有一張藏寶圖的內容如下：（略）。當你到達荒島時發現絞架不見了，這樣可以找到寶藏嗎？你還可能會遇到什麼問題，讓你無法順利地找到寶藏？	一個非常重的家俱需要搬動，此家俱的底面是方形 1 × 1。沿著其任意一個角轉動 90 度，轉了幾次後它能夠被搬到和起始位置相鄰的位置並且面向同一方向嗎？	地圖上是新興都市的道路相關位置，若現在要設置一消防隊／電信局，那麼應該設在哪？	如果教官想要得知學生曾服用搖頭丸的人數，直接請學生回答，可能無法反應真實的情形。當他從台北市的高中生抽出 1000 位之後，你會建議他怎麼做？
情境分析	以圖形或代數式的思考(數學世界)，體驗數學可由少數元素來生成複雜結果的功能。	先視覺化文字的資訊（非數學世界），再協調抽象複數符號與圖形間的關係。運用數學工具來臆測與檢驗。	簡化椅子與轉動現象（非數學世界）並抽象化成點、點的移動和進一步的移動（數學世界）。瞭解點具有表示位置和保留方向的意義。	詮釋最佳位置的意義（非數學世界），並定義距離（數學世界）。協調最佳位置與不同定義下的距離。	評估容易取得的資訊是什麼（非數學世界），提出可估計比例的模式（數學世界），在情境中檢視模式的適用性。

Exploring the Scaffolding Strategies of Inserting Mathematical Modeling into Teaching of Secondary Mathematics and the Latent Mechanism of Promoting Teachers' Reflection

Kai-Lin Yang[1] and Fou-Lai Lin[2]

[1]Department of Mathematics, National Chunghua University of Education

[2]Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Abstract

This paper reports on how the researchers assisted a senior high school teacher to insert mathematical modeling into his teaching in the context of time and content constraints. The paper examines the effects of the teaching strategies as well as the latent mechanism of promoting teachers' reflection in terms of the "solving doubt" theory. During the research process of one and half years, one researcher collaborated with the participating teacher with aim of helping this teacher overcome obstacles in teaching mathematical modeling. Subsequently, both researchers interpreted the data from this process. The teacher's growth during the participating process was demonstrated by (a) teaching materials: consideration of the relevance of textbooks, the diversity of problem situations, movement from the fluency of sequential activities to consideration for the association with students' experience and the variety of students' modeling strategies initiated by the teaching material; (b) teaching method: playing the leading role in the beginning, the hinting and observing role, the managing role followed by the premeditating and discussing role; (c) students' modeling thought: changing the perspective from problem solving to mathematical modeling. After examining the teacher's growth under each learning context, it is confirmed that providing the source of teaching material is helpful in establishing the teachers' confidence, inspecting and learning from another teacher's teaching can break through the limitation of teachers' reflection, and openly discussing the analysis framework of students' modeling thought encourages teachers to design new activities. This paper provides educators or teachers with new strategies for professional development in practice. This analysis of the latent mechanism underlying this teacher's reflection may help educators elaborate the process of professional development.

Key words: Mathematical Modeling, Teachers' Professional Development, Mechanism of Reflection