

# 重差術——三角測量

■ 英家銘

中國古代的重差術，  
可以幫助我們巧妙地計算出無法直接測量的高度。

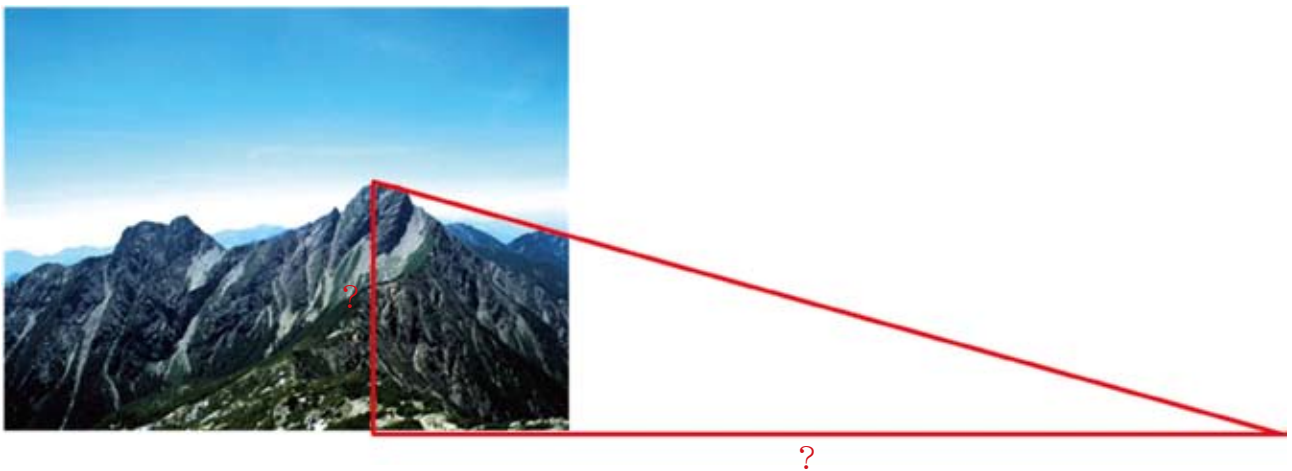
我們從小就聽過很多建築物或山的高度，比如說，台北101大樓高509公尺、玉山高3,952公尺。但是，你是否想過這些高度是如何測量出來的？

除了這些高度外，還有比如山谷的深度等，也都是古人有興趣的問題。現代人最常應用在測量上的數學，是所有高中生都會的「三角函數」。研究三角函數的學問稱為「三角學」（trigonometry），從英文字源來看，這個字的意義是「三角（trigon）測量（metry）」，就是用三角形作測量的學問。台灣某些補教界名師或少數高中教師，很努力地教高中生三角函數「和差化積」、「積化和差」等公式的技巧，來證明各種漂亮的恆等式，卻不重視三角測量的應用，實在是本末倒置。

## 玉山有多高

古人對大地測量也有興趣，但是，像山的高度、谷的深度，是無法用一把夠長的尺直接看刻度量得的。事實上，就算真的有那麼一把超級長的尺，人們還是無法直接測量山高。

那麼，要如何量山的高度呢？在測量時，常用到國中學的畢氏定理——直角三角形兩股上的正方形面積和等於斜邊上的正方形面積。如果直角三角形的三邊長是 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，其中 $c$ 是斜邊，三邊就會有 $a^2 + b^2 = c^2$ 的關係。如果知道直角三角形的其中兩邊，就可以很容易地求出第三邊。可惜的是，如果把山的高度看成直角三角形的一股，仍然有另一個未知數，因為我們不能從平地水平地向峰頂下方挖一條地道。因此，在這個直角三角形中，至少有兩個未知數。



如何測量玉山高度？（圖片來源：[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mount\\_Yu\\_Shan\\_-\\_Taiwan.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mount_Yu_Shan_-_Taiwan.jpg)下載後修改而成）

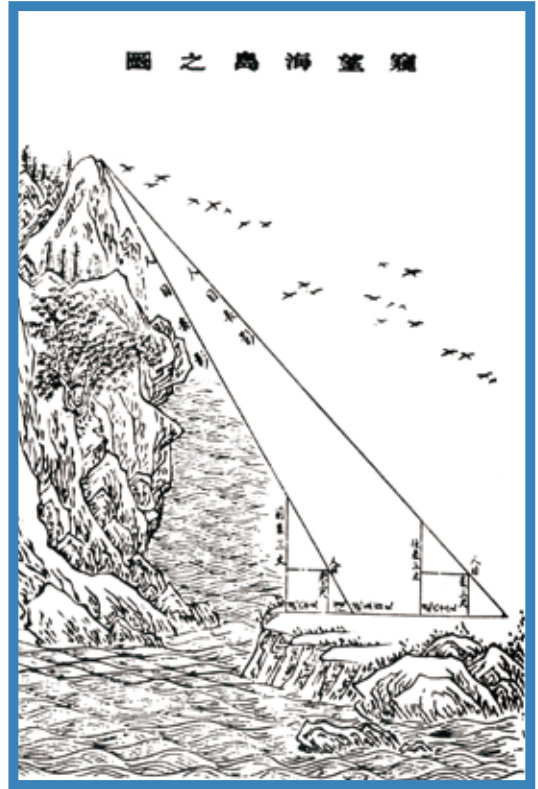
在國中數學課程中，我們知道，要求出兩個未知數必須列出兩個方程式。古人也知道，雖然無法直接求出山高，但可以利用兩次測量求山高，這就是「重差術」。

### 重差術的應用

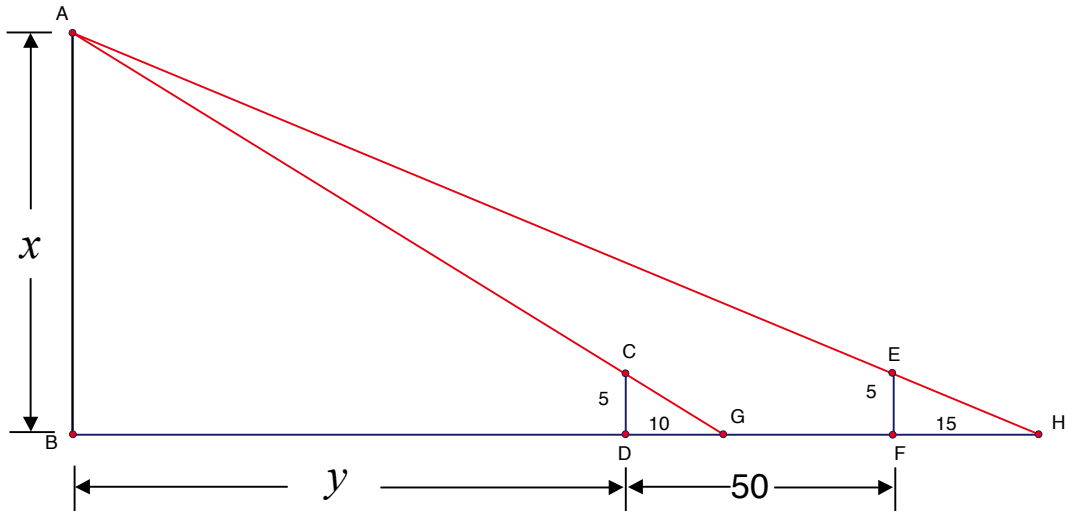
西元3世紀，三國時代魏國的劉徽，寫了一本《海島算經》，第一題「望海島」就是測量海島的高度。測量海島的困難與測量山高一樣，因為你只能在遠處測量，不能拿一把尺越過海拉到海島上。劉徽所使用的「重差術」，就畫在古書裡。

劉徽當年如何找出重差術的方法，並沒有記載在《海島算經》中，不過，我們可以運用相似三角形的概念來理解這個方法。我們用以下引文來看看望海島的題目與示意圖，為了計算方便，題目的數字與單位已經過修改。文中所謂的「兩表」是指兩根（測量用）標竿，「前後相去」表示前後表距離，「參相直」是指三點共線，「卻行」表示向後退，「表末」則指表的頂端。

今有望海島，立兩表，齊高5公尺，前後相去50公尺，令後表與前表參相直。從前表卻行10公尺，人目著地取望島峰，與表末參合。從後表卻行15公尺，人目著地取望島峰，亦與表末參合。問島高及去表各幾何？



《古今圖書集成》中的望海島圖。（圖片來源：[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5c/Sea\\_island\\_survey.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5c/Sea_island_survey.jpg)）



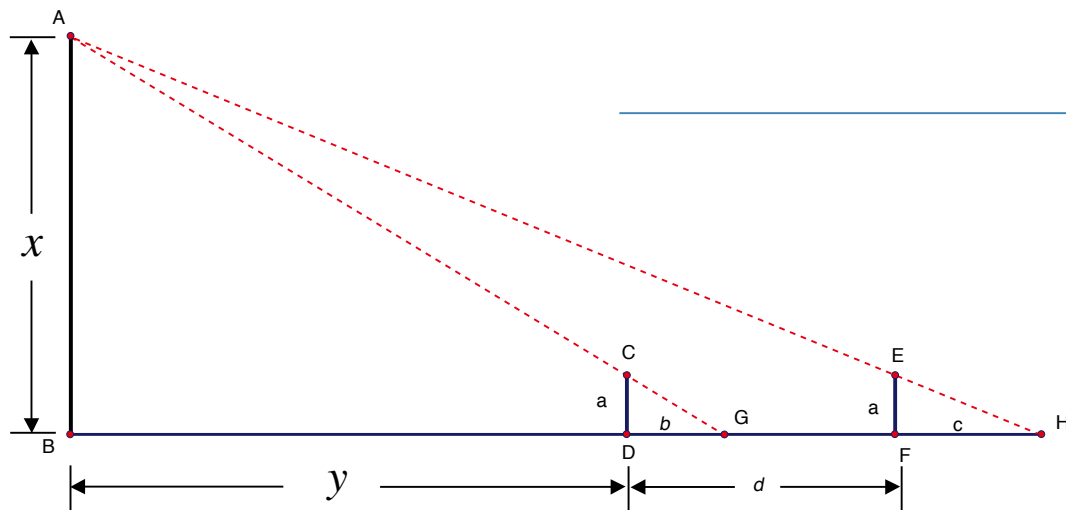
本題是說，想要測量海島AB的高度，在岸邊立了兩個「表」（CD與EF），都是5公尺，兩表之間DF的距離是50公尺。從前表CD向後走10公尺，把眼睛貼到地面G點，則島峰A與表末C重合，也就是A、C、G成一直線。從後表EF向後走15公尺，把眼睛貼到地面H點，則島峰A與表末E也重合，也就是A、E、H成一直線。

假設島高AB是 $x$ ，前表到海島峰頂正下方的BD是 $y$ 。很明顯地， $\triangle ABG$ 與 $\triangle CDG$ 相似， $\triangle ABH$ 與 $\triangle EFH$ 相似。因此， $AB:CD = BG:DG$ 且 $AB:EF = BH:FH$ 。根據這些性質，可以列出兩個方程式：

$$\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y+10}{10} \\ \frac{x}{5} = \frac{y+50+15}{15} \end{cases}$$

解二元一次聯立方程式得 $x = 55$ ， $y = 100$ 。因此，海島高度是55公尺。

上述方法可以一般化。只要運用符號表示「表高」、「前表卻行」、「後表卻行」、「兩表相去」等數據，例如用 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 依序表示上述4個已知量，測量望海島高度的示意圖就變為下圖。



同樣可以列出二元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y+b}{b} \\ \frac{x}{a} = \frac{y+d+c}{c} \end{cases}$$

解二元一次聯立方程式得：

$$x = \frac{a(c+d-b)}{c-b}, y = \frac{bd}{c-b}$$

於是，得到海島高度的公式 $\frac{a(c+d-b)}{c-b}$ ，其中 $a$ 是表高， $b$ 、 $c$ 是前、後表卻行， $d$ 是兩表之間的距離。

中國古代的重差術，可以幫助我們巧妙地計算出無法直接測量的高度。或許下一次，你可以嘗試自己測量看看某座海島（譬如宜蘭龜山島），或是某座建築物（譬如台北101）的高度喔！

還有，古代數學中常見的一些方法（譬如重差術），都針對了某些特定問題求解，然而，它們也具備了一般性的延拓條件。由此來看，解決特定問題並不影響我們理解一般性的理論與方法，重差術的歷史啟發性在此！

英家銘  
中原大學數學系