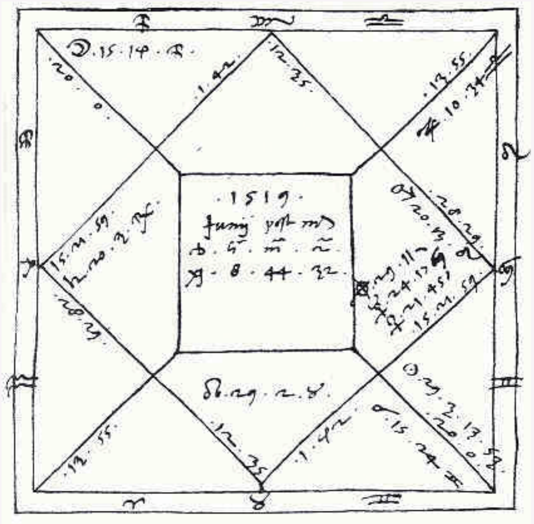
對數的故事

紀筌惟

對數的發明解決了 18 世紀天文學家必須面對的繁雜且大量計算的困擾，對其他科學領域也有巨大的貢獻，因此是數學史上重要的成就之一。

歷史背景

15 世紀初，歐洲文藝復興興起一場影響遍及文學、哲學、藝術、政治、科學、宗教等的文化運動，這時期也是海上遠洋航運蓬勃發展的階段。受到十字軍東征的影響，士兵從遠東帶回來的香料極其珍貴，威尼斯商人甚至稱它是「天堂來的種子」。因產地遙遠，內陸運輸危險且不便，因此刺激了歐洲貴族紛紛贊助船隊以拓展海上貿易的航線，遠洋航運便成了歐洲當代相當重要的產業。



文藝復興時期的星圖格式（圖片來源：電子網路資料，三家占星學概論：西洋篇（上），作者：石中龍，http://fengshui-magazine.com.hk/No.65-Nov02/40-3.jpg）

遠洋航運需要豐富的天文和地理知識，而天文學家可利用天體觀測的結果計算其運行的軌道，預測出未來數年天體的精確位置，並以格林威治天文台的時間為基準，再對照天體位置就能描繪出星圖。航海者只要參照星圖，便可計算經緯度來確定船隻的位置與航道方向。然而，在計算天體的運行軌道時，經常會遇到大量且繁雜的計算，如何簡化計算就成為當時天文學家迫切需要解決的問題，就在這樣的背景下對數產生了。

對數的起源

考古學者發現一塊約西元前 1,800 年左右，巴比倫人所做的古老泥板，板上分別寫著以 1 為公差的等差數列和以 2 為公比的等比數列，這古物是對數想法最早的起源。西元 1484 年，

法國數學家柴凱特（Nicolas Chuquet）把巴比倫人泥板上的數列分別延伸，等差數列往負數、等比數列往分數，並且從兩個數列中觀察到等比數列中任意兩個數值相乘的結果，恰好等於所對應等差數列數值相加後所對應等比數列的值。

學例來說，公比是 2 的等比數列中，$2 \times 64 = 128$，其等差數列的值相加結果是 7（即 $1 + 6$），等差數列值 7 所對應的等比數列值也是 128。

西元 1554 年，德國數學家史提弗（Michael Stifel）在其著作《整數算數》中也曾提出，等差數列與等比數列間有某種對應關係，等比數列公比若改成其他正整數，兩數列之間的關係也存在。利用這一層關係，使繁雜的乘除運算過程簡化，透過加減運算得到所想要的答案，這正是對數的核心概念。

對數的發明者

儘管柴凱特與史提弗都發現了等差與等比數列間確實有關係，但始終欠缺臨門一腳，而與對數的發明失之交臂。最後，才由蘇格蘭的數學家納皮爾（John Napier）站在諸前賢的肩膀上發明了對數。

納皮爾的專長是物理學與天文學，在數學方面只能算是業餘的學者。由於家中富裕不愁吃穿，讓他可以無後顧之憂地專心鑽研天文與物理，為了簡化繁瑣的天文計算過程，便利用閒暇時間另行研究數學。儘管只是業餘的數學研究者，但是把複雜的數學式子化繁為簡，是他最擅長且專精的本領。

在對數還沒發明之前，為了解決大量的數字運算，數學家都是借助三角學中的積化和差技巧（prosthaphaeresis）來加速

等差數列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
等比數列	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

巴比倫人製作的一塊泥板上分別寫著以 1 為公差的等差數列和以 2 為公比的等比數列。

-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

法國數學家柴凱特拓展了巴比倫人泥板上的數列，等差數列往負數、等比數列往分數延伸。

發明對數的蘇格蘭數學家、物理學家兼天文學家約翰．納皮爾。（圖片來源：電子網路資料，維基百科。https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e3/John_Napier.jpg/220px-John_Napier.jpg）

計算，善於簡化計算的納皮爾更是其中的佼佼者。為了找出能夠更簡化球面直角三角形計算的方法，納皮爾花了近 20 年的時間終於發明了對數。在他的第一本著作《對數奇妙的規律準則》中，以近 37 頁的理論解釋與九十幾頁的對數表附表完整地描述了對數的理論。第二本著作《對數奇妙準則結構》更詳細地說明了對數的計算與編製對數表的方法。因此，納皮爾被後人公認為對數發明的創始者。

對數表的製作

納皮爾於第一本著作公開後，英國數學家布里格斯（Henry Briggs）建議他修改對數的計算為以 10 為底，這種搭配十進位的做法，操作更方便，也使對數的用途更廣泛。可惜的是，納皮爾發明對數時已年過半百，還沒來得及修改便已去世，修改的工作便由布里格斯接手。

1624 年，在布里格斯所發表的著作《對數算數》中，便修正了納皮爾原編製以 2 為底的對數，改為以 10 為底，其所編製的對數表一直沿用迄今，也是現在教科書常用的對數表。透過以下的例子，可以了解當初布里格斯製作對數表的方法。

為了製作對數表，得先計算 10 的平方根與其結果的平方根，計算結果可得值如下：

$10^{1/2}=3.16228$	$10^{1/128}=1.01815$
$10^{1/4}=1.77828$	$10^{1/256}=1.00904$
$10^{1/8}=1.33352$	$10^{1/512}=1.00451$
$10^{1/16}=1.15478$	$10^{1/1024}=1.00225$
$10^{1/32}=1.07461$	$10^{1/2048}=1.00112$
$10^{1/64}=1.03663$	$10^{1/4096}=1.00056$

以 $\log_{10}2$ 為例，由於 2 介於 $10^{1/2}$ 與 $10^{1/4}$ 之間，若要求 $\log_{10}2$ 的值，做法是把 2 除以 $10^{1/4}$，如果求得的值是 $\chi1$。同理，依樣處理 $\chi1$，如果求得的新值是 $\chi2$，計算過程如下：

$$2=10^{1/4}\times\chi1$$

$$\Rightarrow\ \chi1=2\div10^{1/4}=1.12468$$

$$\chi1=1.12468=10^{1/32}\times\chi2$$

$$\Rightarrow\ \chi2=1.12468\div10^{1/32}=1.04660$$

$$\chi2=1.04660=10^{1/64}\times\chi3$$

$$\Rightarrow\ \chi3=1.04660\div10^{1/64}=1.00961$$

$$\chi3=1.00961=10^{1/256}\times\chi4$$

$$\Rightarrow\ \chi4=1.00961\div10^{1/256}=1.00057$$

結合上述計算，可以得到：

$$2=10^{1/4}\times\chi1=10^{1/4}\times10^{1/32}\times\chi2$$

$$=10^{1/4}\times10^{1/32}\times10^{1/64}\times\chi3=\cdots$$

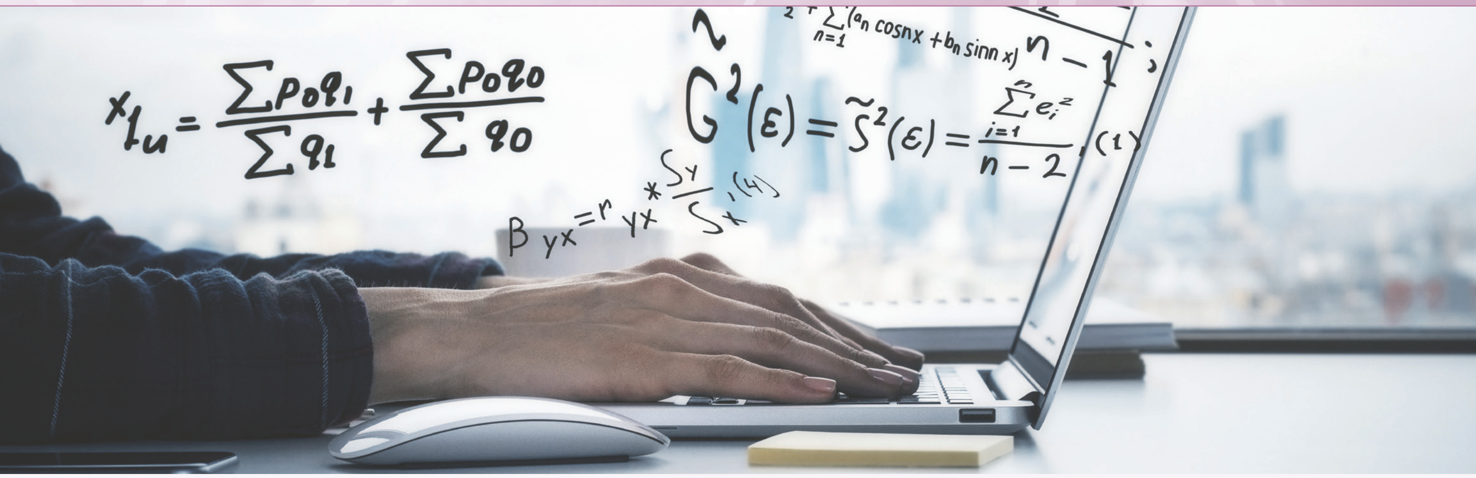
$$\log_{10}2=\log_{10}(10^{1/4}\times10^{1/32}\times10^{1/64}\times\chi3)$$

$$\approx\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}\approx0.3$$

因此，若要求更準確的值，可再重複這過程更多次。

如何透過對數解決問題

對數的概念主要是以加減代替乘除的一種巧思，它可把需要大量計算乘除、乘方和開方的工作，化繁為簡轉化成以加減的方式來處理。舉例來說，若要計算 $\sqrt[3]{123.45\times678.9}$ 是多少，現代人只需按電子計算機，瞬間便可得到解答，但對於文藝復興時期的人，這個問題可能就得耗掉他們大量的心力。如今有了對數，再來看看這道難題可以怎麼解決：



現代人只需按電子計算機，瞬間便可得到解答。（圖片來源：種子發）

步驟一：把運算式轉為對數型式：

$A=\sqrt[3]{123.45\times 678.9}$

$$\log_{10}A=\log_{10}(123.45\times 678.9)^{1/3}$$
$$=\frac{1}{3}(\log_{10}123.45+\log_{10}678.9)$$

步驟二：查對數表，得 $\log_{10}123.45=2.9015$，$\log_{10}678.9=2.8318$。計算運算式結果如下：

$$\log_{10}A=\frac{1}{3}(\log_{10}123.45+\log_{10}678.9)$$
$$=\frac{1}{3}(2.0915+2.8318)$$
$$=1.6411$$

步驟三：回查對數表，求 A 值：

$$\log_{10}A=1.6411\ \Rightarrow\ A=43.7622$$

從上述的例子，可以發現計算的過程中，必須經常用到對數表，再觀之當時用來解決大量繁瑣的計算工作時所查的對數表就有九十幾頁，顯然地，對數表的資料是否足夠正確，在應用上就格外重要了。

自然對數

如前所述，透過對數運算時，數據完整的對數表是相當重要的工具，但實務上卻發現不論是早期發現的對數表，或是布里格斯編製以 10 為底的對數表，往往因為對數表的數據間隔太大，計算時始終無法查到想要的值。如前述的例子中，就需要查真數表中 123.45 與 678.9 所對應的對數值，也需要查對數值 1.6411 所對應的真數。因此，一張有價值的對數表不單是真數的間隔要夠細密，對數的間隔也必須如此，這樣使用起來才會方便，也才能得到準確的答案。

在經過以不同底數多方嘗試的研究後，學者們終於找到以尤拉數 e 為底所編製出的對數表最能符合上述的需求。這以 e 為底的對數就稱作「自然對數」，成為自然科學中常使用、應用廣泛的對數函數。

對數在生活中的應用

在日常生活中，應用對數解決問題的例子不勝枚舉，只需熟悉對數運算的幾個基本規則，再透過對數表查值，就可以獲得解答。以下舉幾個例子：

對數在數學領域中的應用　2^{33} 是一個很大的數字，計算起來相當繁瑣。若不要求計算結果應準確到何種程度，透過對數的運用就可簡單地估出 2^{33} 到底是幾位數？首位數字是什麼？

解答：假設 2^{33} 是 X

$X=2^{33}$

$\log_{10}X=\log_{10}2^{33}=33\times\log_{10}2$

$=33\times 0.30103=9.93399$

$X\approx 10^{9.93399}=10^{0.93399}\times10^{9}$

$1<10^{0.93399}<10$

$1\times10^{9}<10^{0.93399}\times10^{9}<10\times10^{9}=10^{10}$

$\Rightarrow$ 10 位數字

另假設 $10^{0.93399}$ 是 Y

$\log_{10}Y=\log_{10}10^{0.93399}=0.93399$

透過查表得知，Y 約為 8.58994，首位數字是 8。

由此可知，2^{33} 是一首位數字是 8 的 10 位數。

對數在人口計算上的應用　假設某地區人口的年增率固定是 1.7%，則至少要多少年後，其人口數才會超過現有的兩倍。

解答：假設需要 X 年

$(1+1.7\%)^{X}>2$

$(1.017)^{X}>2$

$X\log_{10}1.017=X\times0.00732>\log_{10}2=0.301$

$X>0.301\div0.00732=41.12$

可以發現，42 年後這地區人口數應可以超過現有人口數的兩倍。

對數在化學領域中的應用　假設有一水溶液其氫離子濃度（H^+）是 4×10^{-9}M，求其 pH 值。（$\text{pH}=-\log[H^+]$ 值）

解答：pH 值 $=-(\log_{10}4\times10^{-9})$

$=-(\log_{10}4+\log_{10}10^{-9})$

$=-(0.6021-9)=8.3979>7$

在正常情況下，當溶液的 pH 值小於 7 時，代表溶液呈酸性；pH 值大於 7 時，溶液呈鹼性；而當 pH 值等於 7 時，則代表溶液是中性。從上面例子中可以得知這溶液呈鹼性。

對數在天文領域中的應用　夜晚的天空無數的星星閃爍其中，有些明亮耀眼，有些暗淡無光，但因星星和地球的距離各不相同，究竟要如何判斷其亮度是因本身的發光強度，或是因距離地球遠近所致呢？

假設 M 代表絕對星等，換句話說，就是恆星真正發光的強度；m 代表視星等，也就是地球所見恆星的亮度，d 則代表距離，d_0 設為標準距離單位，約等於 32.616 光年，三者之間的關係是

$$M=m+5\log_{10}(d_0/d)$$

據此可用以判斷實際恆星本身發光的強度。

若由地球所測量出來的數據，北極星與織女星的視星等分別是 2 和 0，距離分別是 431 與 26.5 光年，便可以透過計算絕對星等來判斷哪一顆恆星在比較基準相同的情況下是較亮的。

解答：

北極星　$M=2+5\log_{10}(\frac{32.616}{431})\approx-3.6052$

織女星　$M=0+5\log_{10}(\frac{32.616}{26.5})\approx0.4509$

絕對星等的數字越小代表這恆星越亮，從計算結果可以發現，北極星的絕對星等小於織女星，代表若站在相同的基準點下，也就是與地球距離相等的情況下，北極星本身發光的強度會遠大於織女星。

18 世紀法國數學家拉普拉斯曾經說過：「納皮爾發明了對數，透過對數的計算，天文學家可以大幅縮短計算的時間，不僅節省了工作的時間，更是延長了天文學家的壽命。」換句話說，納皮爾發明了對數，恰是開給那些天文學家一帖延年益壽的良方，真是功德無量！

對數、解析幾何與微積分這 3 項突破性的創見，是歐氏數學發展史上最偉大的 3 大成就。

對數、解析幾何與微積分這 3 項突破性的創見，是歐氏數學發展史上最偉大的 3 大成就。對數會有如此高的評價，在於其對遠洋航線的拓展幫助很大，不但發現了新航線，改變了世人對整個世界的空間概念，也促進了東西方的貿易往來，奠定了歐洲經濟發展的基礎。此外，不論是在銀行利率的計算、物理、天文的應用中，也都可以看到它的身影。

在現代數學的教科書中，可以發現不管是內容的安排，或是對數定義的講解，通常都會置入指數的概念，讓人誤以為指數的發明是先於對數的。但從前述歷史的探討可以發現事實卻是相反，即從巴比倫古老的泥板中，也只是單單兩個等比等差的數列，絲毫沒有指數的概念。事實上納皮爾約從 44 歲開始，共花了近 20 年的時間只研究對數，連基本指數的概念都未建立，即便如此，他的貢獻已足以名列數學史上重要的事蹟之一了。

儘管科技進步，使部分對數的應用逐漸被電子計算機所取代，但其歷史背景、對數為何發明、對數解決了什麼樣的問題，仍應是學習與認識對數時不可不知的。

紀荃惟
台灣中油股份有限公司石化事業部會計組