



◎ 郭君逸

大福彩 的終局考驗

講到彩券，不免提到機率。





台灣彩券

台灣現行的彩券是從 1999 年 12 月開始的，歷經了四代，一開始叫「公益彩券」，後來改叫「台灣彩券」。政府把盈餘與回饋金用在各種補助與公益上，也提供不少弱勢族群的就業機會。至今二十餘年，瘋迷了不少民眾，尤其逢年過節的時候，買氣更是「搶搶滾」，看來大家真的非常熱心做公益。

從開賣至今年 6 月，總共發行了 13 種彩券。「樂透彩」是最開始的玩法，也是當時唯一的彩券，後來才發行多種彩券。「樂透彩」在 2008 年過年前下市，並轉型成威力彩。隨著「樂線九宮格」、「大福彩」的下市，現行的彩券玩法剩 10 種，其中「49 樂合彩、39 樂合彩、38 樂合彩」分別依附在「大樂透、今彩 539、威力彩」的獎號下，玩法也差不多，「3 星彩、4 星彩」玩法也一樣，剩下的就是「Bingo Bingo」跟「雙贏彩」了。

機率

講到彩券，不免提到機率。彩券也是高中講到排列組合時，常拿來科普的問題之一。而計算彩券各個玩法的機率，用古典機率模型即可，也就是

要計算的獎項彩券數 / 所有彩券數

舉例來說，要計算大樂透頭獎機率，就要先算所有的大樂透彩券數，共 C_6^{49} 張，而能中頭獎的只有唯一的一張，因此機率是：

$$1/C_6^{49} = 1/13983816 \approx 0.00000715\%$$

同樣的，要計算大樂透二獎機率，假設開獎的獎號是 1、2、3、4、5、6，然後特別號是 49，能中獎的獎號是 {1、2、3、4、5、49}、{1、2、3、4、6、49}、{1、2、3、5、6、49}、{1、2、4、5、6、49}、{1、3、4、5、6、49}、{2、3、4、5、6、49} 共六組，因此機率是

$$6/C_6^{49} = 6/13983816 \approx 0.0000429\%$$

例如買 4 星彩的組彩，而且買 2266 這個號碼，中獎的機率如何呢？4 星彩所有的獎號是 0000 ~ 9999 共 10,000 組，組彩就是不看順序，開出來的號碼是 2266、2626、2662、6226、6262、6622 這六組都中獎，因此中獎機率是

$$6/10000 = 0.06\%$$

有沒有覺得其實很容易呢？其實說容易，也不是真的那麼容易，有些獎項，要數的數量需要一點排列組合的概念才比較好算，否則一個一個是列不完的。例如：賓果賓果 9 星中 2 的機率是：

$$C_2^{20} C_7^{60} / C_9^{80} = 877743 / 2773927 \approx 31.64\%$$

至於台彩所有獎項的機率，哪一個最難算呢？答案是已經下市的「樂線九宮格」，因為已經下市十幾年了，就不在此著墨了。有興趣的讀者可以自行查一下它的玩法算算看，它剛上市的時候還有補教老師因為算清了它各獎項的機率而上了新聞。

期望值

不要再講機率了，請直接說買什麼彩券最划算？接下來就要講了，這就要先談到數學期望值。數學期望值（簡稱期望值）就是數學上解釋這種不確定現象的一種方式，僅供參考，並沒有說這樣的資訊一定是正確的，因為有時還要看數學建模對不對、誤差大不大而定。

要怎麼算一張彩券所能得到獎金的期望值呢？其實就是把這張彩券每一種可能獲得的獎金乘上其機率，然後加起來就是了。例如雙贏彩，可能獲得的獎金分別是頭獎 15,000,000 元、貳獎 100,000 元、參獎 500 元，肆獎 100 元，而這四種獎金發生的機率分別是

$$\text{頭獎} \quad 2 / C_{12}^{24} \approx 0.00007396\%$$

$$\text{貳獎} \quad 2 \times C_{11}^{12} C_1^{12} / C_{12}^{24} \approx 0.01065\%$$

$$\text{參獎} \quad 2 \times C_{10}^{12} C_2^{12} / C_{12}^{24} \approx 0.32217\%$$

$$\text{肆獎} \quad 2 \times C_9^{12} C_3^{12} / C_{12}^{24} \approx 3.579675\%$$

把上面一一乘起來並相加得

$$15,000,000 \times 0.00007396\% + 100,000 \times 0.01065\% + 500 \times 0.32217\% + 100 \times 3.579675\% \approx 26.93$$

因此一張雙贏彩券的獎金期望值大約是 27 元，也就是說，拿 50 元買一個價值 27 元的票券。

由於每種彩券的價格不同，彼此間無法比較，因此換成用獎金期望率來比

較。例如雙贏彩是用 50 元買價值 27 元的票券，其獎金期望率約是 $27 / 50 = 54\%$ 。有興趣的讀者可以自行算一下其他彩券玩法的獎金期望率。

若讀者真的試著算，就會發現用原始定義來算期望值並不是那麼容易。例如大樂透頭獎就算不出來，原因是頭獎獎金跟所有中獎的人平分，然後就把一個獨得、兩人平分、三人平分……一直到很多人平分的情況都加起來，然後加上一些微積分的概念，再借助電腦的幫忙，花了很大的功夫，最後算得獎金期望率大約是 55%。

為什麼說「大約」呢？因為中間的計算用了很多的近似，使得誤差越來越大。在台彩剛出來的四、五年間，很多國高中科展作品在算各種彩券的期望率，而且大家算的還不太一樣。原因是因為中學學的統計工具不多，覺得算這個不容易，才會選此當科展題目。等學完大學的統計後，就有比較多的工具可以用了。

其實算大樂透的期望率不用那麼麻煩，而且還是所有彩券中最容易的。大樂透的規則中明訂會以當期銷售收入的 56% 作為獎金，期望率就是 56%。什麼？對，就這麼簡單，因為期望值就是一個平均的概念，若不是這樣，多了或少了的獎金要跑去哪呢？





以下列出目前台彩各種彩券的獎金期望率。

		期望率	稅後期望率
39 樂合彩	2合	60.73%	60.73%
	3合	49.24%	39.39%
	4合	51.67%	41.34%
4 星彩	正彩	50%	40%
	組彩	48%	38.40%
3 星彩	正彩	50%	40%
	組彩	48%	48%
	對彩	30%	30%

Bingo Bingo 玩法較多，另外列個表。

		期望率	稅後期望率
不含超級獎號	10 星	59.22%	54.84%
	9 星	65.30%	62.11%
	8 星	62.61%	58.31%
	7 星	54.90%	53.34%
	6 星	61.09%	58.51%
	5 星	60.32%	56.45%
	4 星	50.82%	50.82%
	3 星	55.50%	55.50%
	2 星	56.01%	56.01%
	1 星	50%	50%
猜大小或猜單雙		58.82%	58.82%
猜小單雙		54.06%	54.06%
猜和		56.91%	56.91%
含超級獎號	10 星	62.33%	54.86%
	9 星	54.04%	49.54%
	8 星	48.90%	44.92%
	7 星	37.84%	35.15%
	6 星	39.57%	37.64%
	5 星	39.70%	37.12%
	4 星	23.68%	23.68%
	3 星	22.97%	22.97%
	2 星	10.51%	10.51%
	1 星	7.50%	7.50%

稅後是指超過 5,000 元要課 20% 的稅，至於千分之四的印花稅在某些領獎的方式是不用收的，就沒算在內。

從上表可知，各樂合彩的 2 合與 BingoBingo 9 星的獎金期望率在稅後還超過 6 成，也就是拿 100 元買 60 元的東西。這樣不是還賠嗎？是啊，買彩券是做公益嘛！

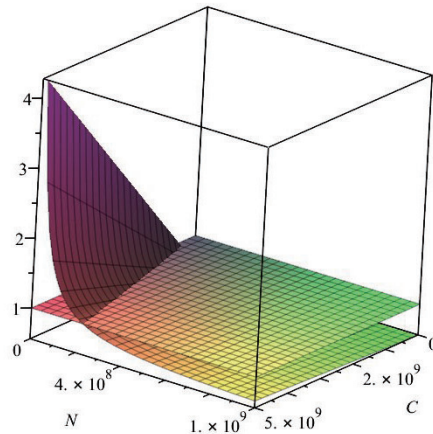
累積獎金

剛剛的計算都沒把累積獎金算進去，若累積獎金一多，還是有機會讓獎金期望率大於 1 的。要怎麼把累積獎金算進去呢？這時就跟當期購買的人數有關。以大樂透為例：假設當期頭獎累積獎金是 C ，總共賣出了 N 張，因為是「頭獎累積獎金」，所以有人中頭獎這筆錢才會被領，也就是才會被算進期望獎金內。假設中頭獎的機率是 $p = 1 / C_6^{49}$ ，有人中頭獎的機率就是 $1 - (1 - p)^N$ ，因此這時的獎金期望率（稅後）就是

$$f(C, N) = C(1 - (1 - p)^N) / 50N \times 0.8 + 0.5063$$

因為 $f(C, N) = 1$ 不好解，所以是用估計的。 N 是很大的數， $1 - (1 - p)^N$ 會很靠近 1，因此 $f(C, N) \approx C / 50N \times 0.8 + 0.5063$ ，解出來是 $x = 30.9y$ 的直線。也就是大約購買張數要小於頭獎累積獎金的 30 分之 1，獎金期望率才會大於 1。雖然貳獎也有累積，但太少發生，就不算它了。

大樂透有始以來最高頭獎累積獎金發生在 2011 年 2 月 8 日第 100000011 期，累積了 1,125,777,856 元頭彩獎金，當期共銷售了 60,263,039 張，差不多是 18.7 倍。這時 $f(C, N)$ 算出來是 80%，算是最靠近 1 的一次了。



$z = f(C, N)$ 與 $z = 1$ 交界處約為斜率 $1/30$ 的線。

利用同樣的方式，可算出威力彩在購買張數要小於頭獎累積獎金的 65 分之 1，才會讓獎金期望率大於 1。

問題來了，累積獎金知道，要怎麼預估購買張數呢？這個彩券行知道，因此他們每次都貼著頭彩獎金上看多少億的告示。購買張數就要自己先扣掉累積獎金，再換算回來預計購買張數。

值得一提的是，越多人買，累積獎金會被均分掉，期望值會越低。在同一期中，彩券行寫的頭獎上看獎金越來越高的時候，表示他們賣出了更多張的彩券，應該越不要買才對。

大福彩的終局考驗

現今已下市的大福彩，玩法與大樂透差不多，只是換成 40 選 7，一樣有特別號。但因為玩法太像，又一注要 100 元，是大樂透的兩倍，所以銷售量長期低迷，開賣四年只有開出 6 次頭獎，平均 67 期才一次，因此在 2019 年 4 月 27 日開獎完後讓它下市。但也因為這樣，獎金不再累積，若頭獎沒人中，獎金會依比例分攤到其他獎。



這件事真的太好了。前面在計算 $f(C, N)$ 的時候，裡面的 p 是中頭獎的機率，因為中頭獎才能拿到累積獎金。現在只要「中獎」就可以分到累積獎金，在這個情形下 p 要換成中獎的機率， $1 - (1-p)^N$ 基本上就是 1 了。大福彩的獎金期望率是 57%，稅後是 49.05%，只要購買張數不到累積獎金的 63.75 分之 1，獎金期望率就會大於 1。

於是筆者查了一下前一期（4 月 24 日）累積過來的獎金是 300,232,418 元，算一下只要購買人數不到 470 萬人即可。而依以往的資料來看，大福彩的買氣上 30 萬張的非常少！

天啊！這不是發了嗎？是的，就算最後一期，購買人氣爆增到 100 萬張，獎金期望率也可以達到差不多 357%（稅前），也就是拿 100 元可以買到 357 元的東西。

不過當時因為筆者與幾位教授在網路上討論，消息很快就走漏。當時幾位教授合資買了 113 張末代大福彩，一直關注著頭彩上看獎金的金額，希望它低一點、成長慢一點。結果短短 3 天購買張數破天荒衝到了快 300 萬張，最後核算下來的稅後獎金期望率大約是 128%。

而 113 張大福彩最後開獎的結果，稅後是 10,200 元，小虧了一點點。當時幾位網友聽了我們的建議，也花幾萬元購買，後來的投資報酬的確都差不多 120% 左右，跟預計的差不多。這說明了兩件事：一是我們運氣比較衰，二是買的不夠多。

期望值不是萬能

其實期望值並不是玩這種機率遊戲的唯一依據，有些條件是沒有考慮進去的，像是自己的金錢能力。例如假設你全部的

錢有 10,000 元，現在玩丟硬幣的遊戲，玩一次要 10,000 元，正面可以得 20,002 元，反面 10,000 元就沒了，這樣期望值是 1 元。也就是玩越多次，平均起來就會每次都差不多賺 1 元。

但問題來了，因為身上只有 10,000 元，只要一輸就無法再繼續玩下去，根本沒辦法玩很多次。反觀，把遊戲改成玩一次 10 元，正面就給你 12 元，同樣期望值是 1 元，但因為身上的錢可以玩很多次，這樣這個遊戲就可以玩了。

在購買彩券上，買 10 張完全相同號碼的大樂透，跟 10 張不一樣號碼的，期望值都一樣，但誰會這樣買呢？原因是這樣風險會增大，只要這個號碼沒中，這 10 張就都沒中了。

組合設計

由於末代大福彩的頭獎沒人中的話，獎金不累計，會分攤到其他獎上，為了盡量得到分攤的獎金，要盡量提高所買彩券的中獎機率。大福彩最低的獎項是普獎（對中獎號中的三個數），只要得到普獎就可以分攤到錢，因此在彩券的購買上，要盡量涵蓋所有三個數的組合，另一方面也降低了風險。事實上，有一門學問叫「組合設計」，就在做這種事情。

筆者當時借助電腦，利用貪心演算法，算出用 113 組獎號，涵蓋 40 選 3 個的各種組合，也就是說保證中普獎。這也是為什麼當時選 113 組的原因。不過因為目的是分攤累積獎金，但除了末代大福彩普獎就能攤得的特殊情況外，大樂透與威力彩都只有頭獎可以得到累積獎金，而頭獎只有唯一的一組，這招就沒有用了。

數學期望值可以提供我們決策前的參考，但記得要以能夠重複多次嘗試為前提。

聰明包牌

不過若不要那麼貪心要中頭獎，退而求其次，只要中貳獎就好，組合設計剛好可以派上用場。很多彩券行早就提供這樣的服務，稱作「聰明包牌」。

若你心中有想買的 10 個號碼，並希望大樂透開出的 6 個號碼在這 10 個裡，那就一定中頭獎，只能把 10 選 6 的 210 組號碼全買才行。退而求其次，只希望保證中 5 個號碼，只要買 68 組即可，運氣好一點還可以中頭獎。當然，也可以只保證中 4 個號碼，那只要買 26 組……術語叫「包 10 碼穩中 5 星」、「包 10 碼中 6 保 4」等。

在歷史上，還真的有用組合設計賺錢的例子。在《數學教你不犯錯》一書中提到，麻州樂透跟我們的大樂透玩法差不多，但它有個特殊規定，就是頭獎獎金超過 200 萬美金時，貳獎也可以分得累積獎金。而一群 MIT 的學生看出了可以利用組合設計的方法提高獲利，於是只要每次累積獎金到一定量，有利可圖的時候，他們就會在網路上集資「聰明包牌」。2005 年到

2010 年他們賺走了 800 萬美金，獲利有 15% 以上。

他們當時還翹課、翹班以專注在這件事上，而且為了不走漏風聲，還聘請工讀生分散到各個投注站下注。因為在單一投注站下大筆金額太招搖，而且一被發現有利可圖時，買氣大增的話，就跟前面解釋的，賺的少了，甚至賠錢。

數學期望值可以提供我們決策前的參考，但記得要以能夠重複多次嘗試為前提。職業賭徒一定不會像電影裡一樣，隨隨便便就梭哈，因為他們懂得細水長流，再加上自己對各種牌型的機率、期望值的了解，就能持續有收入。買彩券也是如此，拿「不影響生計的零用錢」買就好，寧可每期都買一張同樣獎號，也不要一口氣把全身家丟進去，畢竟買彩券是做公益，對吧？

郭君逸

臺灣師範大學數學系

