◎ 高竹嵐

從桌遊「疫病危機」看條件機率

如何用條件機率做出世界第一的遊戲？

桌遊設計師麥特利考特（Matt Leacock）有個挑戰。

在他的面前有一張世界地圖，他希望透過這張地圖做一款關於傳染病的遊戲。基本的大概念是：每一天都有新的確診病例，以某種隨機的方式出現在不同的地點，玩家要在病例多到失控前穩住局勢，研發解藥，進而帶領世界戰勝疫情。

問題是，他想做出一種效果：已經有確診的地方，有比較高的機率出現新的確診。這在真實世界中是非常合理的，畢竟出現確診代表那個地方病毒已經開始傳播，接著有更多的確診並不意外。但問題是，在桌上遊戲中，怎麼製造出這樣的效果？

首先，要每回合隨機在不同地點製造新案例，最直觀可以想到的方式大概是：

方案一：有一疊地點牌，每回合翻一張，翻到哪裡放哪裡。

但這樣一來，翻過的牌在牌庫翻完之前不會再被翻出來，已經有確診的地方，發生新確診的機率反而變低，這跟需求不符。因此勢必要讓被翻過的牌回到牌庫裡。

方案二：有一疊地點牌，每回合翻一張，翻到哪裡放哪裡，然後把牌洗回牌庫裡。

這樣一來，已經被翻過的牌就會被洗回去，被放確診的地方就可能再被翻到，機率不會降低。但這樣夠嗎？別忘了，目標是希望已經有確診的地方，再出現確診的機率會增加。

大家稍微動手算一下，應該就會注意到，機率不會增加。如果整個牌庫有 20 張牌，每次翻完洗回去，每一張牌被抽到的機率永遠都是 1 / 20，不管它之前有沒有被抽到過。換言之，在方案二之下，每個地點出現新確診的機率都是恆定的，不管它之前有沒有出現過確診。

怎麼讓有確診的地方的機率增加呢？以下是一個方法：

方案三：有一疊地點牌，每回合翻一張，翻到哪裡放哪裡。然後把這牌跟牌庫頂最上方的 5 張牌洗一洗後，疊在牌庫的上方。

注意喔，是疊在牌庫的上方，這會造成巨大的差異。

比較方案二與方案三；為了方便解釋，假設整個牌庫有 20 張牌，然後翻出武漢，在武漢放了一個確診案例。接下來，會發生以下的事情：

如果是方案二，武漢就會被洗回整個牌庫。基於牌庫總共有 20 張牌，下一張翻到武漢的機率是 1 / 20，跟其他沒有確診病例的牌一模一樣。

但如果是方案三，武漢就會跟牌庫最上方的 5 張牌洗在一起，然後放在牌庫的最上面。由於你知道武漢之前已經被翻過，因此武漢一定在牌庫最上面的 6 張牌中（原本的 5 張牌加上武漢），下一張翻到武漢的機率就是 1 / 6 ！

注意到了嗎？在方案三中，基於你知道武漢已經被翻過，接下來再被翻到的機率就增加了！這就完全滿足最前面所說的，讓有確診的地方出現新確診的機率增加的需求。

桌遊設計師麥特利考特最後用了一個類似（但較為複雜）的方法做出了這款遊戲，也就是鼎鼎大名的「疫病危機（Pandemic）」。它的原始版本在桌遊公信網 BoardGameGeek 上排名第 85 名，近年重出的傳承版本更高居全球遊戲排行第二名，由此便知這款遊戲有多成功。

以上便是條件機率的經典運用。講簡單一些，條件機率跟你說，當你已經知道某個條件成立的時候，事件發生的機率變了。

在疫病危機的範例中，你已經知道「武漢是之前被翻過的牌」這個條件，因此「下一張是武漢」的機率變了。

這個概念在遊戲圈運用的非常廣泛。最明確的例子是像 21 點或德州撲克這樣的撲克牌遊戲，這類遊戲都有一些公開的牌，以及一些蓋的牌，然後問你之後是否能夠湊齊某種牌張組合。在這裡，「公開的牌」就是你的已知條件，「能不能組成某種牌組」就是你的事件，而事件發生的機率明顯隨著你的條件而改變，畢竟如果有人開出一張黑桃 A，就再也不可能有第二張黑桃 A 了。有興趣的人，網路上可以很輕易地找到有人計算 21 點的各種條件機率，以及對應策略的文章。

但當然，條件機率並不只是在遊戲中出現，真實世界中也被廣泛運用。以前面的疫情為例，整個疫情的傳播狀況，本身就是一個條件機率的結構。當看到越多的確診案例，就表示社會上有很多帶原者的機率越高，畢竟都「看到」病例了。而社會上有越多的帶原者，被傳染到的機率就越高，畢竟身邊就有一大堆的帶原者。因此，「看到確診案例」這個條件改變了「你得病」的機率。有興趣的人可以搜尋 3Blue1Brown 的一個模擬範例。

甚至連你的手機裡都充滿著條件機率。不知道大家有沒有注意到，當你在手機裡打下第一個字，它會跳出一些「下一個字」給你選，而且隨著手機使用的壽命越來越長，跳出的「下一個字」往往會越來越接近你真的想打的「下一個字」。這個原理其實也很單純：手機輸入法會記錄你的打字習慣，記錄你在某個字（例如「桌」）之後，接某個特定的字（例如「遊」）的機率。久而久之，它便能推算你在打「桌」這個字的時候，條件機率最大的「下一個字」是什麼，然後把那個字推薦給你。

不，並不是有人在手機後面監控你，它只是把你打字的條件機率記下來。

如果理解以上的概念，就可以回過頭來看教科書上條件機率的經典問題：三門問題，或稱蒙提霍爾問題（Monty Hall Problem）。這個問題的設定是這樣的：

你的面前有三道門，其中只有一道門後面有名車，另外兩道門後面都是山羊，你的目標是要選到有車的門。你先選了一道門，然後主持人立即打開了另一道門，門後面是頭山羊。主持人給你一次換選擇的機會，你該換嗎？

我先說正確答案：選擇換門，你贏的機率會變兩倍！

大部分人的第一直覺通常是：沒差。因為打開了一道山羊門，剩下的兩道門一定是一台車跟一頭山羊，因此換不換，拿到獎金的機率不都是 50% 嗎？

這裡要非常小心，你這裡得到的條件是什麼？是「這是一道山羊門嗎」？

不是喔，是「你選了一道門，然後主持人立即開了一道山羊門」！

這樣的條件要怎麼用呢？就來看看門後面不同分布時各會發生什麼事。為了方便解釋，把門編號為 A、B、C，而你選了 A 門。

1. 有 1 / 3 的機率，三道門後面依序是車、羊、羊。

a. 主持人有 50% 的機率會打開 B 門，這時你換門會輸。

b. 主持人有 50% 的機率會打開 C 門，這時你換門會輸。

2. 有 1 / 3 的機率，三道門後面依序是羊、車、羊。

主持人有 100％的機率會打開 C 門，這時你換門會贏。

3. 有 1 / 3 的機率，三道門後面依序是羊、羊、車。

主持人有 100％的機率會打開 B 門，這時你換門會贏。

因此，在知道「你選了一道門，然後主持人立即開了一道山羊門」這樣的條件下，以上是你所有的可能性。在這些可能性中：

1a 和 1b 是換門會輸的狀況，這些狀況的機率總和是 1 / 3。

2 和 3 是換門會贏的狀況，這些狀況的機率總和是 2 / 3。

你換門，贏的機率會變兩倍，很反直覺吧！如果不相信，你可以上網搜尋 Monty Hall Problem Simulation，有人直接用程式模擬了一千萬次，證實換門贏的機率是 2 / 3。

如果你覺得這還不夠反直覺，可以上網搜尋 Boy and Girl Probability Paradox，以及它的延伸版本，看看你會不會腦汁耗盡。你也可以跟朋友一起玩一場疫病危機，一樣會腦汁耗盡，但你至少可以拯救世界。

高竹嵐
交通大學統計學研究所