一般報導

三國 π 裏袖乾坤

劉徽的數學貢獻

對於圓面積的計算，
最早見於阿基米德《圓的度量》一書中，
三國時的劉徽稍後也有類似的算法公諸於世，
二者先圓面積後圓周率的思考進路，
值得我們深思與借鏡。

洪萬生

「周三徑一」歲月長

隨意畫一個圓形，圓周長度大約是直徑的三倍。這個事實，經過台灣師範大學數學系學生針對民族數學的教學單元所做的田野調查，顯示傳統木匠最是耳熟能詳。因此，數學史上圓周率π的第一個有意義近似值（等於3），可能是數學家向工匠學習的結果。這也可以說明古代中國算書中的「周三徑一」是怎麼來的。

根據數學史家研究，西漢天文算學經典《周髀算經》早就有此一比率。在最近出土的漢簡《算數書》（最遲在公元前一八六年西漢呂后二年問世）中，雖然沒有此一比率，不過，該書所提供的圓柱體與圓錐體體積公式分別是（L／12）C^2與（L／36）C^2，其中C與L分別是底圓周長與高，卻利用了相當於「周三徑一」的比例。說得明確一點，這兩個公式只有在$\pi=3$的情況下，才是正確的公式。

事實上，《算數書》中的「圜（圓）材」即圓柱體，其體積公式是「藉周自乘，以深乘之，十二成一」，與《九章算術》中的「圓堡壔」（也是圓柱體）公式一致。又「旋粟」與「囷蓋」的體積公式，與《九章算術》中的「圓錐」或「委粟」的體積公式完全一致，也都是「下周自乘，以高乘之，三十六而一」。此外，還有兩書中的「圜（圓）亭」都指「截頂圓錐體」，其體積公式是「下周乘上周，周自乘，皆并，以高乘之，卅六成一」，將其改寫成現代符號，即相當於L（$C_2C_1+C_2^2+C_1^2$）／36（其中C_1、C_2及L分別代表此一「圓亭」的上、下周長及高。）

《算數書》中所謂的「旋粟」，是指圓轉形的的粟米堆，當一袋的粟米往地面傾倒時，自然形成現在所謂的「圓錐（體）」，後者首次在《九章算術》出現。《九章算術》中還有另一立體稱作「委粟」，意即「積儲粟米」，如果以「委粟平地」連稱，則其形也當如「圓錐」才是。此外，《算數書》中還有「囷蓋」一詞，是指中國秦漢時代穀倉的圓錐形頂蓋。

無論是圓柱、圓錐或圓亭，它們的體積公式中都利用了「圓周」與圓面積的關係，也就是圓面積等於「周自乘，十二而一」，而這當然也表示，它們都涉及了「周三徑一」這個近似值。如果《周髀算經》、《算數書》與《九章算術》的知識內容，可以追溯到先秦甚至於更早的年代，那麼「周三徑一」果眞就源遠流長了！

「以方出圓」顯身手

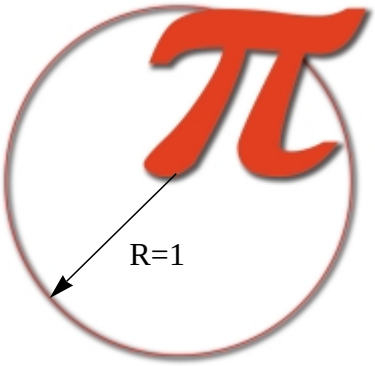
然而「周自乘，十二而一」與「周三徑一」一定可以關連在一起嗎？嚴格說來，我們現在利用古代某數學文本中的一個圓面積公式，去反推圓周率π的近似值爲何，可能沒有太大的意義！譬如說吧，如果從古埃及人的圓面積公式（64／81）d^2，其中d是直徑，與當前普遍採用的圓面積公式πr^2做比較，推論出他們所用的圓周率近似值是 3.16等，那麼，我們就必須先確認，當時的埃及人是否已有圓周率的概念（包括：它是不是一個常數！）。現代史家或數學家糾纏著πr^2（r是圓的半徑）到處去探索π的故事，看起來實在有一點便宜行事。

話說回來，在《九章算術》計算圓面積公式的「圓田術」中有四個併陳公式，依序是（1）半周半徑相乘得積步；（2）周、徑相乘，四而一；（3）徑自相乘，三之，四而一；（4）周自相乘，十二而一。上文中的「三之，四而一」，是乘以3再除以4的意思。同理，「十二而一」則是除以12的意思。簡單比對公式（2）與（3），

http://www.edp.ust.hk/math/history/3/3_11.htm
http://www.china10k.com/trad/history/2/25/25z/25z04/25z0483.htm

劉徽　魏晉時數學家。中國古代數學理論的奠基人。他在注《九章算術》時在數學理論和方法上做出了許多傑出的貢獻。他創造的割圓術已含有現代極限的思想，為計算圓周率提供了科學的方法。

圓周率 π　圓周率是指平面上圓的周長與直徑的比，用符號 π 表示。中國古代有圓率、圜率、周等名稱。古希臘歐幾里得《幾何原本》（約公元前三世紀初）中提到圓周率是常數，中國古算書《周髀算經》（約公元前二世紀）中有「徑一而周三」的紀載，也認為圓周率是常數。歷史上曾採用過圓周率的多種近似值，早期大都是通過實驗而得到的結果，如古埃及紙草書（約公元前一七〇〇年）中取 $\pi=(4/3)^4=3.1604$。第一個用科學方法尋求圓周率數值的人是阿基米德，他在《圓的度量》（公元前三世紀）中用圓內接和外切正多邊形的周長確定圓周長的上下界，從正六邊形開始，逐次加倍計算到正96邊形，得到 $3+(10/71)<\pi<3+(1/7)$，開創了圓周率計算的幾何方法（也稱古典方法，或阿基米德方法），得出精確到小數點後兩位的 π 值。中國數學家劉徽在注釋《九章算術》時（二六三年）只用圓內接正多邊形就求得 π 的近似值，也得出精確到兩位小數的 π 值，他的方法被後人稱為割圓術。南北朝時代的數學家祖沖之進一步得出精確到小數點後 7 位的 π 值（約五世紀下半葉），給出不足近似值 3.1415926 和過剩近似值 3.1415927，還得到兩個近似分數值，密率 355／113 和約率 22／7。其中的密率在西方直到一五七三年才由德國人奧托得到，一六二五年發表於荷蘭工程師安托尼斯的著作中，歐洲稱之為安托尼斯率。阿拉伯數學家卡西在十五世紀初求得圓周率 17 位精確小數值，打破祖沖之保持近千年的紀錄。德國數學家柯倫在一五九六年把 π 值算到 20 位小數值，後投入畢生精力，在一六一〇年算到小數後 35 位數，該數值就用他的名字稱為魯道夫數。此後，無窮乘積式、無窮連分數、無窮級數等各種 π 值表達式紛紛出現，π 值計算精度也迅速增加。一七〇六年英國數學家梅欽計算 π 值突破 100 位小數大關。一八七三年另一位英國數學家尚可斯把 π 值計算到小數點後 707 位，可惜他的結果從 528 位起是錯的。到一九四八年英國的弗格森和美國的倫奇共同發表了 π 的 808 位小數值，成為人工計算圓周率值的最高紀錄。電子計算機的出現使 π 值計算有了突飛猛進的發展。一九四九年美國馬里蘭州阿伯丁的軍隊彈道研究實驗室首次用計算機（ENIAC）計算 π 值，一下子就算到 2,037 位小數，突破了千位數。一九八九年美國哥倫比亞大學研究人員用克雷－2 型和IBM－VF型巨型電子計算機計算出 π 值小數點後 4.8 億位數，後又繼續算到小數點後 10.1 億位數，創下新的紀錄。除 π 的數值計算外，它的性質探討也吸引了眾多數學家。一七六一年瑞士數學家蘭伯特第一個證明 π 是無理數。一七九四年法國數學家勒讓德又證明了 π^2 也是無理數。到一八八二年德國數學家林德曼首次證明了 π 是超越數，由此否定了困惑人們兩千多年的「化圓為方」尺規作圖問題。還有人對 π 的特徵及與其它數字的聯系進行研究。如一九二九年蘇聯數學家格爾豐德證明了 π 是超越數等。回顧歷史，人類對 π 的認識過程，反映了數學和計算技術發展情形的一個側面。π 的研究，在一定程度上反映這個地區或時代的數學水準。德國數學史家康托說：「歷史上一個國家所算得的圓周率的準確程度，可以作為衡量這個國家當時數學發展水準的指標。」



圖：http://www.ourscl.org/magazine/200301/0301126.htm
文：http://www.edp.ust.hk/math/history/5/5_5/5_5_12.htm

即可知作者的確是利用了「周三徑一」的事實。該書被認爲成書在東漢初期，作者不詳。從它的體例來看，它的各章可能是由多位不同作者撮編而成。不過，上述這些公式顯然不是盲目抄錄而來。

其實，三國時代的趙爽（字君卿，生平不詳）應該見證了此一事實。在他的《周髀算經》注中，趙爽明確地指出「圓徑一而周三，方徑一而匝四」，並且在說明經文「**方數爲典，以方出圓**」時，也特別強調「**夫體方而度影正，形圓則審實難。蓋方者有常，而圓者多變，故當制法以理之**」。至於所謂的「**理之法者**」，則爲

半周、半徑相乘則得方矣！又可周、徑相乘，四而一。又可徑自乘，三之，四而一。又可周自相乘，十二而一。故曰：圓出於方！

顯然，趙爽在此利用圓面積公式做爲一種「演示」，以便進行「**數之法出於圓方**」的數學哲學討論。或許正因爲如此，他無暇對這些公式加以證明或說明。

儘管如此，趙爽這一位「**負薪餘日，聊觀周髀**（勞力又勞心）」的吳國學者，卻意外地提示了「圓出於方」的認識論意義，這也解釋了同一時代的魏國劉徽在注解「**半周半徑相乘得積步**」時，何以一開始即宣稱「**按：半周爲從，半徑爲廣，故廣縱相乘爲積步也。**」基於這一個問題的轉換或轉譯，劉徽顯然在圓出於方的暗示下，把圓面積公式的「圓田術」關聯到長方形面積公式的「方田術」了。於是，如何把圓形等面積地變換成一個長方形——它的兩邊分別是此一圓形的半（圓）周與半徑，就變成劉徽註解「圓田術」的首要任務了。

上述「方田術」與「圓田術」是《九章算術》第一章〈方田〉中的兩個面積公式，分別用在長方形與圓形的面積計算。此外，該章還包括了諸如「圭田（等腰三角形）」、「邪田（梯形）」與「環田（圓環形）」等面積計算公式。這些公式的正確性，首先由劉徽加以證明。劉徽之所以是第三世紀的偉大數學家，與他的這部分成就當然息息相關。更值得注意的是，他在一般史家所認定以實用爲導向的中國數學傳統中（譬如平面圖形都要

加上一個「田」字），去證明類似像「圭田」這一類不證自明的面積公式。試想「半廣以乘正從」這一個公式傳到他手上時，至少已經有一百五十年歷史了，而且在運用它來計算時，完全不會出現人爲因素以外的誤差，爲甚麼還需要證明呢？顯然，在他的注解中，他希望通過「析理以辭，解體用圖」的途徑，讓《九章算術》能夠「約而能周，通而不黷，覽之者思過半矣！」而這一工作，在知識只求實用的傳統中，是一件沒有意義的事情。

此外，他還特別指出《九章算術》內容中，「事類相推，各有所歸，故枝條雖分而同本幹者，發其一端而已。」如此說來，上述的「方田術」、「圭田術」與「圓田術」又有甚麼關係呢？劉徽利用了「以盈補虛」的割切移補方法，將「圭田」等面積地變換成爲「方田」，也將「圓田」等面積變換成爲「方田」，諸此種種無非是基於「發其一端」的考量吧！

不過，由於「圓田」是一個曲線形，無法純粹運用「以盈補虛」來達到目的，於是，他再輔以「割圓術」而成功地將「圓田」，等面積地變換成爲「半周爲從、半徑爲廣」的「方田」了。

「方圓之率」看端倪

正如上一節所述，劉徽注解「圓田術」的第一句話「按：半周爲從，半徑爲廣，故廣縱相乘爲積步也。」正是他的整個論證的總綱。接著，在第二句話中「假令圓徑二尺，圓中容六觚之一面，與圓徑之半，其數均等。合徑率一而弧周率三也！」換句話說，他清楚地指出，圓內接正六邊形（圓中容六觚）的一邊（一面）與圓半徑（圓徑之半）相等，這個事實相當於「周三徑一」（合徑率一而弧周率三）。事實上，這是數學史上難得一見的一個早期論證，它說服我們何以$\pi=3$是一個有意義的近似值！（如果讀者不相信，請試試$\pi=4$是否有意義？）

緊接著，劉徽「又按：爲圖，以六觚之一面乘一弧半徑，三之，得十二觚之冪。若又割之，次以十二觚之一面乘一弧半徑，六之，則得二十四觚之冪。」也就是說，他開始「割圓」了，利用圓內接正六邊形的一邊乘以圓半徑，再乘以3，則可得圓內接正十二邊形的面積；其次，以圓內接正十二邊形的一邊乘以圓半徑，再乘以6，則可得圓內接正二十四邊形的面積。掌握了此一遞推程序之後，劉徽論證說：

割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣！觚面之外，猶有餘徑，以面乘餘徑，則冪出弧表。若夫觚之細者，與圓合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍，故以半周乘半徑而爲圓冪。

這就完成了「圓面積公式」的證明了，其中劉徽將圓內接正多邊形「割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣」，無疑是涉及無限概念的一種推論。而且，他顯然相信，如此不斷地割下去，圓內接正多邊形最終一定完全與圓周疊合在一起。不過，劉徽是不是相信這樣的一個「最後的正多邊形」存在，從〈劉徽注〉的上下文來看，我們無從獲得答案。其實，這一個數學本體論層次的問題，數學家專注在解題時根本不需要回答，不僅古代劉徽如此，今日的數學家也是如此。

在證明了「以半周乘半徑而爲圓冪」之後，劉徽緊接著指出「此以周、徑，謂至然之數，非周三徑一之率

割圓術　在魏晉時（西元二六三年），數學家劉徽以割圓數求得 $\pi=3.141024$，劉徽的割圓術是：圓內接一個正六邊形，求得六邊形的一邊邊長等於此圓的半徑。接著，圓內接正六邊形推算得圓內接正十二邊形，再推算得圓內接正二十四邊形，以此類推。而圓內接正多邊形的邊數越多時，此多邊形越接近圓形。

http://www.nmns.edu.tw/Web-Title/china/A-2-2_display.htm

也。周三者從其六觚之環耳。」這充分顯示，他知道他所證明的圓面積公式中，圓周與直徑的關係，並非「周三徑一之率」，「周三者從其六觚之環耳」則是針對圓內接正六邊形來說的。不過，他也注意到「世傳此法，莫肯精核；學者踵古，習其謬失。不有明據，辯之斯難。」這可以解釋，何以他會利用「割圓術」來追求圓周率的更精密近似值了。

由於劉徽的「割圓術」必須舉例說明推算過程，所以，他的注文所占篇幅甚廣。這或許也可以解釋，在一九七〇年代以前，何以數學史家那麼容易忽視早就出現了的圓面積計算公式的證明！不過，割圓術一詞在劉徽時代並未出現，照理說與「方田術」，「圭田術」等並列的「圓田術」，才是後世史家必須嚴肅面對的研究課題，從而數學史家也應該重視劉徽如何證明圓面積公式！可惜，事實卻是不然，史家眞正理解此一注解是遲至一九八〇年代才開始的。或許，在此之前他們都不認爲劉徽有可能證明了某些東西，此後才認眞地還原劉徽是如何求圓周率的近似值。

那麼，劉徽究竟如何追求圓周率的近似值呢？首先，他取圓徑 2 尺，亦即半徑 1 尺，然後「割六觚以爲十二觚」，亦即由已知圓內接正六邊形（邊長爲 1 尺），求圓內接正12邊形邊長，得

$\sqrt{267949193445}$忽，「即十二觚之一面也」。劉徽當時所用長度單位，1丈＝10尺＝10^2寸＝10^3分＝10^4釐＝10^5毫＝10^6秒＝10^7忽，按忽這一長度單位是取自蠶絲的寬度。接著「割十二觚以爲二十四觚」，得到$\sqrt{68148349466}$忽，「即二十四觚之一面」。依此類推，求得「一寸三分八毫六忽，餘分棄之，即四十八觚之一面。」

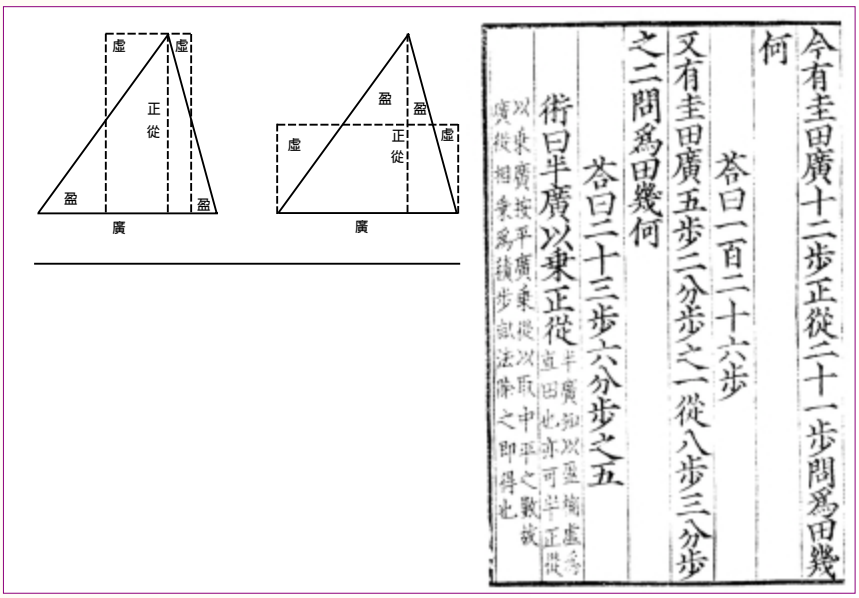
現在，有了四十八觚的一面，劉徽仿圓面積公式證明中的舉例說明方法，「以半徑1尺乘之，又以二十四乘之，得冪三萬一千三百九十三億四寸四百萬忽。」「以百億除之，得冪三百一十三寸六百二十五分寸五百八十四，即九十六觚之冪也。」也就是說，如令C_{2n}、S_{2n}分別代表圓內接正$2n$邊形的邊長、面積，則$S_{96}=24\times C_{48}=313+(584/625)$平方寸。依此類推，他再算出「一百九十二觚之冪」，$S_{192}=48\times C_{96}=314+(64/625)$平方寸。由於他經由實際計算得知，$S_{96}+2\times(S_{192}-S_{96})=314+(169/625)$平方寸，而這一面積比圓面積大，同時也大於$S_{192}$，於是，劉徽「還就一百九十二觚之全冪三百一十四寸，以爲圓之定冪，而棄其餘分。再以半徑一尺除圓冪，倍所得，六尺二寸八分，即周數。最後，又令徑二尺與周六尺二寸八分相約，周得一百五十七，徑得五十，則其相與之率也。周率猶爲微少也。」

上述最後一段引文的意思是，取 314 平方寸爲圓面積的近似值，利用「半周半徑相乘得圓冪」的公式，以半徑 1 尺＝10 寸除之，求得圓周長＝6尺2寸8分，再與直徑 2 尺相約的結果得「周率一百五十七，徑率五十」。換句話說，劉徽先利用半徑 1尺的圓內接正 96 與 192 邊形求得圓面積的近似值 3.14 平方尺，再利用「半周半徑相乘」的圓面積公式，求得圓周長是 6.28 尺，最後，再將圓周除以直徑，而得到圓周與直徑的「相與之率」。由此可見，他並非利用這個現代化圓面積公式，來求圓周率近似值，而且也確知圓周率的定義。因此，針對此一近似值「相與之率」，劉徽當然知道「周率猶爲微少也」。

以劉徽為師　以歷史為鑑

祖沖之　繼劉徽後，祖沖之又提出「約率」與「密率」，他求算出約率是22／7，約等於3.14；密率是335／113，約等於3.1415929。這個數字與準確的圓周率 π 值的小數後6位數字相符合。直到經過一千年後（西元1436年）印度的阿爾卡西（Al-Katij）才求算出 $\pi=3.141592653$ 打破了祖沖之的紀錄。

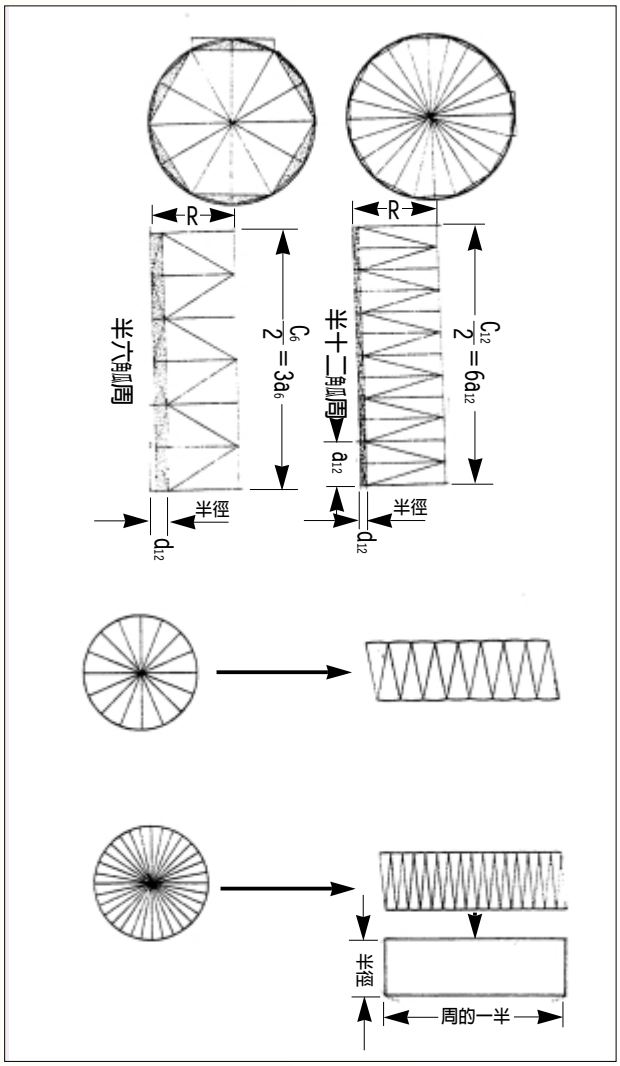
從趙爽的「以方出圓」到劉徽的「方圓之率」，我們可以看到劉徽如何地將一個哲學方面的信念或修辭，轉化成爲一個數學的途徑（approach）或啓思。或許趙爽也有能力完成這一工程，只不過他投入了太多心力來注解《周髀算經》，而這一部分經文，正是有關數學起源的一些論述，以至於沒有機會在「圓田術」上表現他的數學才能。由此看來，數學家的哲學立場，似乎與他們的算學研究無關，對人類所產生的影響，應該是由此而引發的認知或學習策略吧。



「圭田術」與「以盈補虛」示意圖

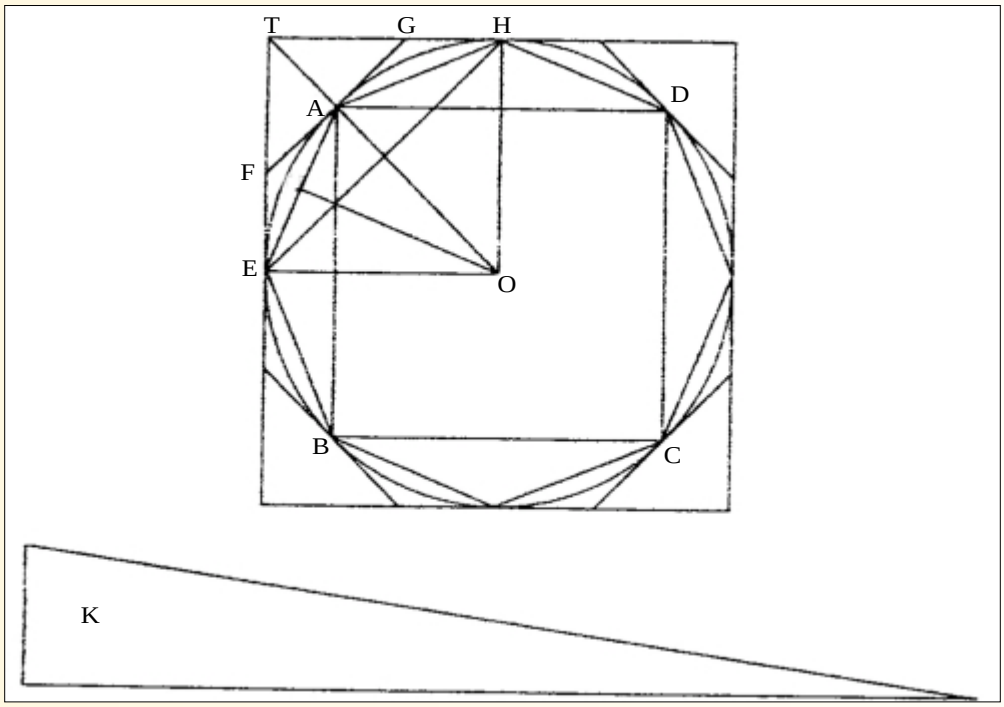
劉徽把數學問題所做的巧妙轉換，也足以證明他的數學洞察力。譬如把一個圓形的半周與半徑，視爲一個長方形的兩邊，使得圓面積公式的證明，也就成了圓形如何變換成爲此一長方形的問題了。正如我們上文一再提及，他的此一途徑或許受到「以方出圓」認識論的啓發。然而，我們也不能否認，他在「割圓」過程中所展現簡化程序、掌握類型的高超計算能力，也確實可以藉此進行涉及無限概念的推論。因此，劉徽可以說是一位抽象推理與計算能力兼備的傑出數學家！

此外，上文也指出，劉徽解析了《九章算術》的「枝條雖分而同其本幹」，從而理解到這些知識的「發其一端」，這說明了他不僅具有思極毫芒的分析能力，而且也擁有綜合全局的功夫。而這二項正是現代數學教育中，最難同時達成的教學目標。



劉徽「圓田術」證明的示意圖

最後，劉徽先圓面積、後圓周率的途徑，也值得數學教育工作者特別借鏡。試想如果按《九章算術》的「圓田術」來計算圓面積，那麼，先求周長與直徑，似乎是理所當然之事，這是因爲面積（二維圖形）都是兩個度量（一維圖形）相乘的結果。在這種情況下，可以暫時不必引進圓周率的概念。事實上，一旦我們把圓面積說成等於 3.14 乘半徑平方或 πr^2 一這也是目前中小學教科書的編寫方式，就很難迴避 3.14 或 π 是怎麼來的問題。或許有人會問，三角形面積等於二分之一底乘高中的1／2又是怎麼來的？梯形面積公式中的 1／2又是怎麼



阿基米德圓面積公式證明的附圖

史家一直無法了解這一頁圓周率追求的重大意義。對於數學教育工者來說，他們也習慣從現代化的圓面積公式 πr^2 來逼近圓周率。其實，此一公式首度出現在第九世紀的阿拉伯數學典籍上，是當時數學家貝納穆沙（Benu Musa）針對阿基米德的《圓的度量》一書所作的注解。至於它是如何地得寵於現代教科書的編者，則有待深入探索。或許這些編者都被微積分中定積分方法求證圓面積 πr^2 所著迷，是以始終難以自拔。

來的？這些問題卻極易回答，其實劉徽老早就利用「以盈補虛」的方法，提供簡單而自然的答案了。

有鑑於此，我們建議中小學數學課程在介紹圓面積公式時，不妨先考慮類似像「半周乘半徑」這樣的公式，在適當時機說明周、徑的關係時，再引進圓周率的概念，最後輔以簡易的近似值逼近方法。如果不想運用劉徽的途徑或手法，那麼，古希臘偉大數學家阿基米德的方法也值得仿效。他在《圓的度量》一書中，就先證明圓面積等於一個直角三角形的面積，後者之兩股分別是該圓的圓周與半徑；緊接著，他據此證明圓周率介於 3＋(10／71)與 3＋(10／70) 之間，後者就是我們所熟悉的近似值 22／7。其實，在數學史上，阿基米德是最早證明圓面積公式，再據以推求圓周率近似值的人。巧合的是，他的公式實質上相當於劉徽所證明的「半周半徑相乘」。數學史上類似這種「多元發現」屢見不鮮，最好的解釋大概就是「人同此心、心同此理」吧。

三國 π 裏袖乾坤

經由本文有關劉徽從「圓田術」推演「方圓之率」的故事，我希望讀者已經多少了解「三國 π」的這一頁滄桑了。我們說它滄桑一點也不做作，因爲過去的數學

像微積分這一類教科書的編寫，在西方數學（教育）史上，似乎離不開特定的文化脈絡（或意識形態）。這些規格化的知識內容，在現代數學去脈絡化特性的推波助瀾下，已經成爲全球化教科書的圭臬了。在這樣的環境下，我們是否有可能，在不用到 π 的前題下，引進並說明圓面積公式呢？

根據本文的論述，答案當然是肯定的！不僅如此，如果運用劉徽或阿基米德的方法，我們還可以因此理解數學知識的在地性或脈絡性，從而體會數學知識豐富的多重面貌。雖然，劉徽（曹魏）與趙爽（孫吳）是否曾經有過數學對話，我們目前還無從得知，不過，從他們所使用的數學概念、術語與修辭中，可以看出他們源自同一個數學文化背景。無論如何，在三國 π 的袖裏乾坤之中，我們讀到的不是人類歷史中的爾虞我詐，而是充分展現他們各自探索眞理的策略與功夫！這是劉徽與趙爽所帶給我們的最大啓示！ □

洪萬生
台灣師範大學數學系