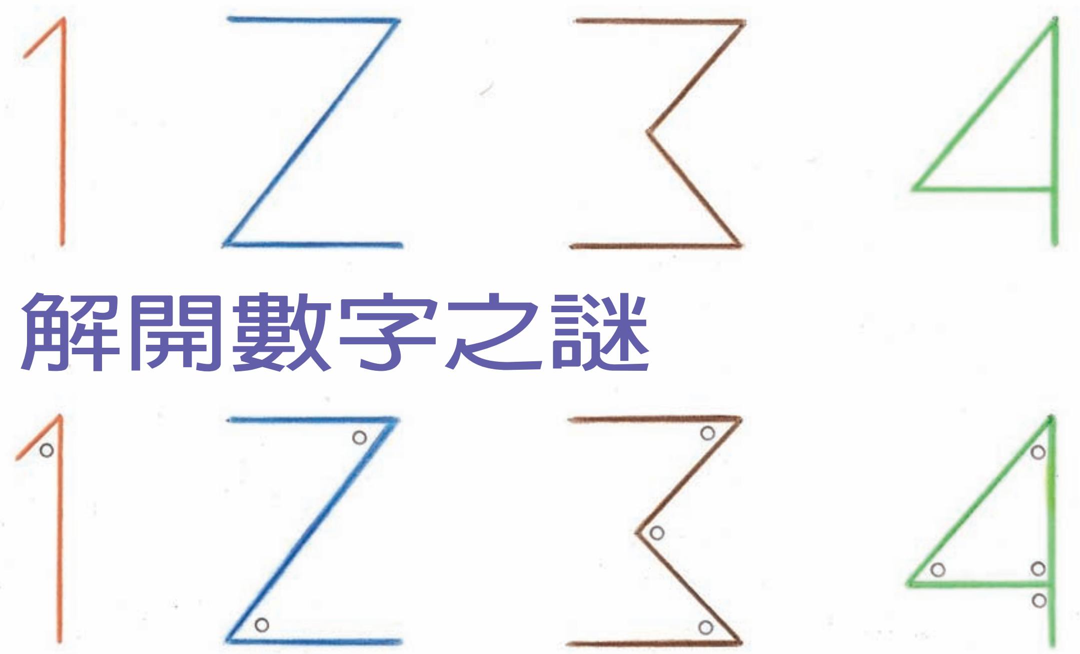


原始阿拉伯數字 1、2、3、4 是這樣寫的，底下一排數字中的小圈圈標示夾角。

解開數字之謎

阿拉伯數字是由印度人在西元第 3 世紀發明的，

現在已正名為「印度・阿拉伯數字」。

據說這 10 個符號的意義，

原本是根據每一個符號的夾角數目來定義的。

余樹楨

在人類社會裡除了音符之外，阿拉伯數字是通行世界的另一種共同符號。阿拉伯數字的發音，隨著語言的不同各有變化，但符號是全球一致的。這個包括從 0 到 9 的 10 個符號，是由印度

阿拉伯數字的發音，隨著語言的不同各有變化，但符號是全球一致的。這個包括從 0 到 9 的 10 個符號，是由印度人在西元第 3 世紀發明的，經由阿拉伯傳入西歐。

人在西元第3世紀發明的，經由阿拉伯傳入西歐。歐洲人以為是阿拉伯人發明的，因此稱為「阿拉伯數字」，現在已正名為「印度・阿拉伯數字」。據說這10個符號的意義，原本是根據每一個符號的夾角數目來定義的。

原始的阿拉伯數字1有如一個鉤子，只有一個夾角，代表1。書寫體的1已經簡化為一直線，但是許多印刷體仍然保留一個鉤。原始阿拉伯數字的2有兩個夾角，現在的寫法已把上邊的一個夾角圓弧化而看不出來。阿拉伯數字3的原始符號有3個夾角，今天的寫法已經把上下兩個夾角圓弧化，但中間的夾角仍然清晰可見。

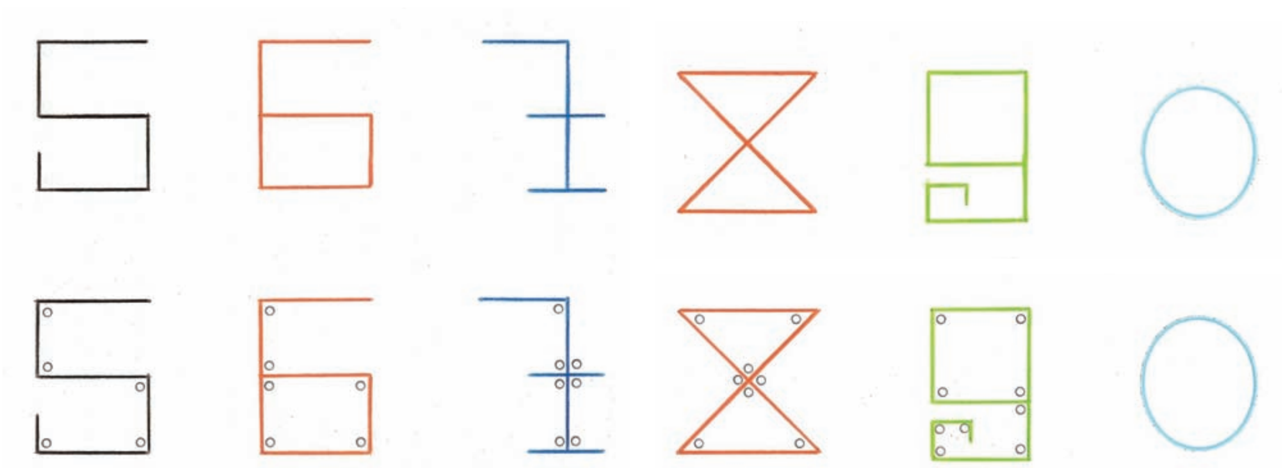
原始阿拉伯數字4的符號有4個夾角，在原始的寫法中，水平那一直線並不穿越垂直的那一條線。筆者在美國求學時，看到美國同學書寫4的時候，水平線常只是碰觸垂直線而已，並沒有交叉通過。當時覺得這可能是他們的習慣寫法，沒想到原來這正符合阿拉伯數字4的原始寫法。

原始阿拉伯數字5的符號有5個夾角，隨著寫法的演化，今天的5已把底下3個夾角全部圓弧化而看不出來，只剩上邊2個夾角。至於6，今天的寫法由於圓弧化，只能勉強看到中間兩個夾角，然而原始符號卻有6個夾角。原始阿拉伯數字7當然有7個夾角，今天的印刷體由於省略了中間及底下的兩條水平線，而看不出夾角的正確數目。不過有不少人寫7的時候，會加上中間的那一條水平線，這大概是原始符號的痕跡了。

至於8這個阿拉伯數字，現在的寫法只能看出中間4個夾角，因為其他的夾角都被圓弧化了，原始的8的確有8個夾角。到了奇數之窮的9，今天的寫法也一樣只能勉強看到中間兩個夾角，然而原始的符號確實有9個夾角，今天印刷體中的9，尾巴特別捲曲，正是原始符號的遺跡。最後來到0，原始符號與今天的寫法是一樣的，它是一個圓圈，沒有任何夾角，因此代表零。從以上的說明看起來，阿拉伯數字的原始符號是以夾角數目來代表該符號的意義，不也是很有創意的一種方法嗎？

0與1誰先開始

從小我們就學會扳著手指數數兒，人類的左右手各有5個指頭，因此十進位的數學表達十分適合地球人。在史蒂芬・史匹柏的電影〈外星人〉（The Extra-Terrestrial, ET）中，那位小外星人只有4個指頭，用十進位計數似



阿拉伯數字5、6、7、8、9、0的原始寫法，下面一排數字中的小圈圈標示夾角，0是沒有夾角的。

乎並不方便，猜想他們極有可能使用八進位數學。當然今天電子計算機使用的二進位算術，只要0與1、黑與白、圈與叉、或開與關，使用兩個不同的符號就可以表達所有的數字。

十進位算術對一般人而言，通常是在眞正了解十進位是如何表達一個數目之前，就已經很熟悉地使用它了。比如說一個數字123.625，我們能立刻讀出壹百貳拾參點陸貳伍，連小朋友也知道它的大小。但是國小數學老師似乎並沒有教我們，123.625其實是$1\times10^{2}+2\times10^{1}+3\times10^{0}+6\times10^{-1}+2\times10^{-2}+5\times10^{-3}$的簡便寫法，也就是說$123.625=100+20+3+0.6+0.02+0.005$，所以說百位（$10^{2}$）、十位（$10^{1}$）、個位（$10^{0}$）的觀念其實已經隱藏在我們的心中。

當然小學生尚未學到數學中「冪」的觀念，實在也很難講得那麼透徹。從「冪」的角度來看，因爲底數是10，所以個位、十位、百位等的次方，分別是0、1、2等，依此類推。也就是說十進位的整數部分，各個位數的冪是從0開始累加的，同時小數部分各個位數的冪是從-1開始遞減的。這就涉及到計數是從0開始，還是從1開始的問題。

深入討論這個問題之前，先講一個爬樓梯的急智問答。題目是：某人從大廳爬到二樓需10秒鐘，若各樓層一樣高，而且他爬樓梯的速度固定，請問他爬到四樓需時若干秒？很多人會不假思索地回答說20秒或40秒，當然也有不少人會說出30秒的答案。回答20秒，是因爲直覺反應認爲四樓是二樓的兩倍高；回答40秒，是因爲直覺反應認爲爬一層樓要10秒鐘，爬到四樓自然就要40秒。這就是計數從0還是從1開始所產生的問題。

我國多把禮拜天當作一星期的第1天，禮拜一是第2天，依此類推，禮拜六是第7天。

如果在英國，20秒的確是正確答案，因爲英國大廳在ground floor，ground floor上去才是一樓，也就是說地面樓是第0樓。但是很多國家的大廳是在一樓，也就是說地面的那一層就是一樓，台灣也是如此。從地面樓爬上四樓，在英國需爬4個樓層，但在台灣只需爬3個樓層，因此在台灣30秒是正確的答案。這顯然是從0開始還是從1開始計數所產生的問題。

再看看掛在牆上的月曆，一般可以看到兩種標示星期的排法：一種是禮拜一擺在一個星期的第1天，禮拜天擺在最後（多數歐洲、南非、南美等國）；另一種是把星期天當作一個禮拜的第1天，星期六是第7天（英、美、加拿大、澳洲等國家）。這也是計數從0開始與從1開始所造成的不同結果。

雙重制度

我們小孩一出生就是1歲，即使是除夕那天出生，第2天就兩歲了，這是我們文化中習於所謂虛歲算法的必然結果。也有人說生命本來就是從媽媽受孕就開始了，因此10月懷胎後出生算1歲，似乎也還說得過去（但年初出生的又如何說？）。不過今天許多法律文件講的是足歲，足歲的計算標準是以出生時爲0歲而非1歲。一個人從呱呱墜地出生、孩提時代入學、投票法定年齡、乃

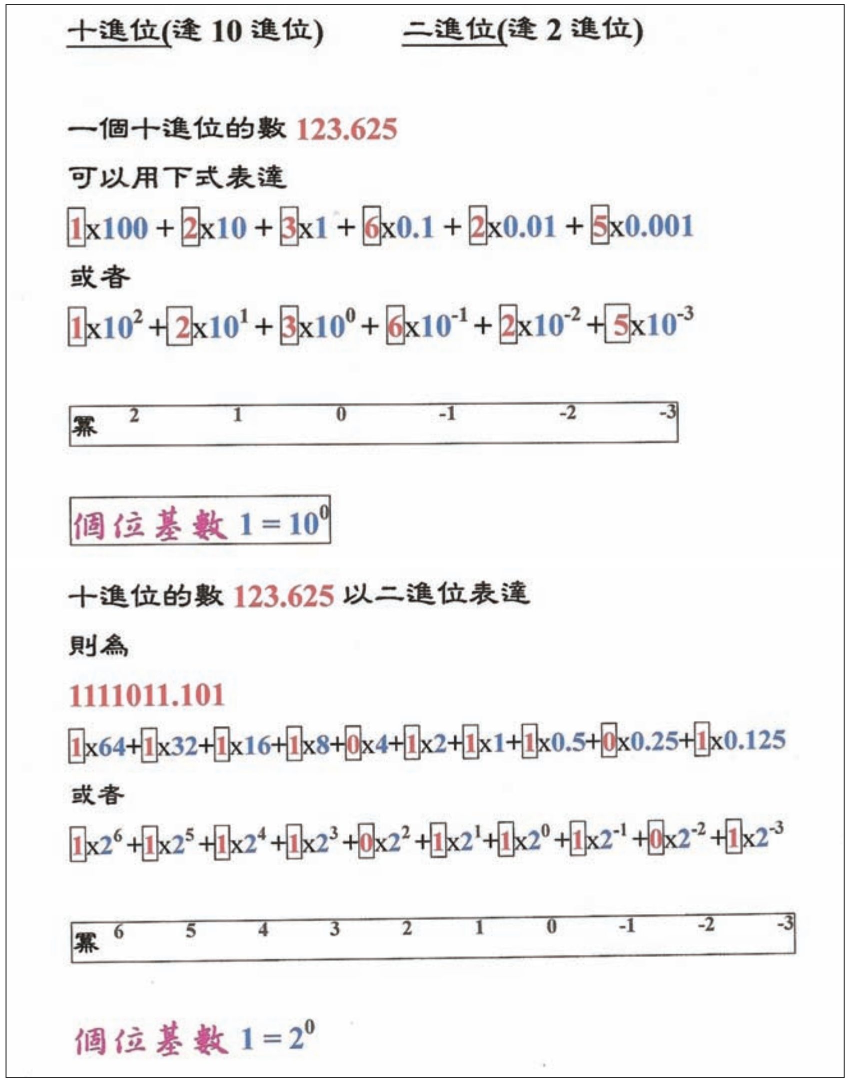
至於就業退休，有太多法律事件是以足歲爲依據的。

我們的文化中常有著兩個不一致，又同時被採行的制度。簡單地說，傳統文化習俗是一個系統，然而如民法等法律規章又是另一個系統，兩者在日常生活中運作，大部分的情況下兩者並不衝突，但是也有互相矛盾的時候。就拿結婚事件來說，早期我們祖父母輩以上的婚姻，如根據民法的定義，有許多是根本無效的，既沒有公開儀式，也沒有結婚證書，也沒有到戶政機關登記，不過他們卻多能白首偕老。有些事故或糾紛，其實是導源於法律與民俗不一致的結果。這種雙重制度也帶給這個社會額外的負擔與成本。

0與1是計數的基本

再回頭比較十進位與二進位計數。使用十進位數學時，個位數、十位數、百位數等各相鄰位數之間，有10倍的關係。因此以10當底數時，個位數、十位數、百位數等整數部分的冪（次方）分別是0、1、2等依序遞增，小數部分則由－1、－2、－3等依序遞減。

二進位計數則以2爲底數，各相鄰位數之間有兩倍的關係。然而各位數的指數（冪）與十進位計數完全一樣，整數部分由0、1、2依序遞增，小數部分由－1、－2、－3依序遞減。因此十進位計數的123.625可以寫成$1\times10^2+2\times10^1+3\times10^0+6\times10^{-1}+2\times10^{-2}+5\times10^{-3}$，而二進位計數法則寫成$1\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}$，或是1111011.101。



十進位的123.625與二進位的1111011.101是等值的。即使在二進位的數字中，其冪仍然是以十進位來表示的，因全以二進位的表示法是$1\times(11)^{110}+1\times(11)^{101}+\cdots\cdots$非常不便。

十進位與二進位計數都同樣使用次方表示法，這是兩種計數法相同的地方。此外，兩種計數法的個位數不管是10^0或是2^0，基值都是1。因此乍看之下1好像是計數的起頭，然而這個1卻又是源自任何底數0次方的結果，似乎0才是計數的最根本源頭。而且不論十進位、二進位、八進位、乃至十六進位計數，個位數的基值都是1，指數永遠是0。所以說0與1就是計數的基本，缺一不可。□

余樹楨
成功大學地球科學系